A 39 *Partielle Ableitungen*

Berechnen Sie für die Funktion f die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

(a) $f(x, y) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x \cdot y^2 + y^4 + 16$ (b) $f(x, y) = (1 + y) \cdot e^{x-1}$ (jeweils $x, y \in \mathbb{R}$)

A 40 *Partielle Elastizitäten*

Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x, y) = 2 \cdot x^{1/2} + 4 \cdot y^{1/2}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Kapital- und Arbeitselastizität an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (100, 400)$. Wie elastisch sind die separaten Änderungseffekte bei Kapital- und Arbeitseinsatz an der angegebenen Basisstelle?

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Kapitaleinsatz um 50% erhöht und der Arbeitseinsatz um 30% vermindert?

A 41 *Totales Differential, partielle Elastizitäten*

Betrachtet wird die Funktion

$$f(x, y) = y + x^{1/2} \cdot 3y^{1/2} \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

(a) Berechnen Sie das totale Differential der Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) = (4, 9)$.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der Basisstelle $(4, 9)$, wenn sich dort die x-Variable um $+1\%$ verändert und die y-Variable um 2% verringert.

(c) Durch welchen Wert des totalen Differentials in $(4, 9)$ kann ein Proportionalitätsfaktor für die approximative absolute Funktionswertänderung im Verhältnis zur Änderung vom Basispunkt $(4, 9)$ zu $(4.04, 8.82)$ beschrieben werden? Berechnen Sie diesen Wert des totalen Differentials, um einen Näherungswert für $f(4.04, 8.82)$ zu finden.

T 42 *Partielle Ableitungen*

Berechnen Sie für die Funktion f die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

(a) $f(x,y) = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot y^2$ (b) $f(x,y) = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 6 \cdot y^3$ (jeweils $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$)

(c) $f(x,y) = (x+y) \cdot e^{x \cdot y}$ (d) $f(x,y) = (x \cdot y) \cdot e^{x+y}$ (jeweils $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$)

(e) $f(x,y) = \ln(x \cdot y + 1)$ (f) $f(x,y) = \ln(x + y^3)$ (jeweils $x > 0, y > 0$)

T 43 *Partielle Elastizitäten*

Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = 100 \cdot x^{3/2} \cdot y^{1/2}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit von Rohstoffpreis $x > 0$ und Transportkosten $y > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Rohstoffpreis- und Transportkostenelastizität an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (50, 10)$. Wie elastisch sind die separaten Änderungseffekte für die Herstellungskosten bezüglich Rohstoffpreis und Transportkosten an der angegebenen Basisstelle?

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 2% vermindert und die Transportkosten um 8% erhöhen?

T 44 *Totales Differential, partielle Ableitungen, partielle Elastizitäten*

Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = ln(x^{2/5} \cdot y^{3/5})$

(a) die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y und das totale Differential in den Punkten $(1,e), (1,1)$;

(b) die partielle Elastizitäten im Punkt $(x_0, y_0) = (1, e)$;

(c) die approximative relative Änderung des Funktionswertes, wenn im Punkt $(x_0, y_0) = (1, e)$ der x-Wert um 10% erhöht und der y-Wert um 5% vermindert wird;

(d) die Tangentialebene zu f im Ausgangspunkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ und damit einer Näherung für den Funktionswert $f(1.1, 0.9)$. Durch welchen Wert des totalen Differentials in $(1,1)$ wird bei dieser Näherung ein Proportionalitätsfaktor für die entsprechende absolute Funktionswertsänderung beschrieben?

T 45 *Cobb-Douglas-Funktion*

Untersucht werden soll die allgemeine Funktion $f(x, y) = x^{\alpha} \cdot y^{1-\alpha}$, wobei $0 < \alpha < 1$ fix. Diese Funktion ist in der Mikroökonomie bekannt unter dem Namen *Cobb-Douglas-Funktion*. Finden Sie eine „α-Regel" bei diesem Funktionstyp für die partiellen Elastizitäten.

> Falls eine (Teil-)Aufgabe dieses Typs in der Klausur vorkommt, reicht es nicht, als „Lösung" nur eine α-Regel aufzuschreiben. Sie können aber z.B. die Aufgabe allgemein mit α lösen und danach das konkrete α einsetzen.