Aufgaben 3D-Extrema unter Gleich-Null Nebenbedingung

A 44

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokale Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x,y) = 4 \cdot x^3 + 2 \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $6 \cdot x + y = 12$

(b) $f(x,y) = 6 \cdot x + 4 \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $x^3 + 2 \cdot y = 5$

(c) $f(x,y) = x^3 \cdot e^{y+2}$ $(x > 0, y \in \mathbb{R})$ unter NB $x + y = 1$

T 48

An welchen Stellen können die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) lokale Extrema annehmen? Welche Art von lokalem Extremum liegt jeweils vor? Welche Funktionswerte werden angenommenn?

(a) $f(x,y) = x \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $x - 3 \cdot y = 24$

(b) $f(x,y) = x^2 + 2 \cdot y^2$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $x + y = 12$

(c) $f(x,y) = 2 \cdot x^{1/2} + 20 \cdot y$ $(x > 0, y \in \mathbb{R})$ unter NB $x + 20 \cdot y = 21$

T 49

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokalen Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x,y) = (1/5) \cdot x^5 + 2 \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $2 \cdot x + 4 \cdot y = 10$

(b) $f(x,y) = x^5 + 10 \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $8 \cdot x + y = 4$

T 50

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokalen Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x,y) = 4 \cdot x + 2 \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $2 \cdot x^2 + y^2 = 12$

(b) $f(x,y) = y \cdot x^2$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $2 \cdot x + y = 9$

(c) $f(x,y) = y^3 \cdot e^{x+2}$ $(x \in \mathbb{R}, y > 0)$ unter NB $x + y = 1$

Z 1

An welchen Stellen können die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) lokale Extrema annehmen? Welche Art von lokalem Extremum liegt vor? Welche Funktionswerte werden angenommen?

(a) $f(x, y) = x^2 - 2 \cdot x \cdot y$ unter NB $\quad y = 2 \cdot x - 6$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 1$ unter NB $\quad 2 \cdot x + y = 12$

(c) $f(x, y) = x + 20 \cdot y$ unter NB $\quad x^{1/2} + y = 30$

Ergebniskontrolle:

zu (a):

- einziger stationärer Punkt $P1 = (2, -2)$ mit $\lambda = -4$
- $D(2, -2, -4) = -6 < 0$, also $(2, -2)$ lokales Maximum von f unter NB.

zu (b):

- einziger stationärer Punkt $P1 = (5, 2)$ mit $\lambda = -4$
- $D_0(5, 2, -4) = 10 > 0$, also $(5, 2)$ lokales Minimum von f unter NB.

zu (c):

- einziger stationärer Punkt $P1 = (100, 20)$ mit $\lambda = -20$
- $D(100, 20, -20) = 5/1000 > 0$, also $(100, 20)$ lokales Minimum von f unter NB.

Z 2

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokale Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x,y) = x + y^3$ unter NB $\quad 2 \cdot x + 6 \cdot y = 8$

(b) $f(x,y) = 4 \cdot x + y^3$ unter NB $\quad x + 3 \cdot y = 5$

(c) $f(x,y) = 9 \cdot x + y^3$ unter NB $\quad x + 3 \cdot y = 6$

Ergebniskontrolle:

zu (a):

- stationäre Punkte $P1 = (7,-1)$ und $P2 = (1,1)$ mit $\lambda = -1/2$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
  - $D(7,-1,-1/2) = -24 < 0$, also $(7,-1)$ lokales Maximum von f unter NB.
  - $D(1,1,-1/2) = 24 > 0$, also $(1,1)$ lokales Minimum von f unter NB.

zu (b):

- stationäre Punkte $P1 = (11,-2)$ und $P2 = (-1,2)$ mit $\lambda = -4$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
  - $D(11,-2,-4) = -12 < 0$, also $(11,-2)$ lokales Maximum von f unter NB.
  - $D(-1,2,-4) = 12 > 0$, also $(-1,2)$ lokales Minimum von f unter NB.

zu (c):

- stationäre Punkte $P1 = (15,-3)$ und $P2 = (-3,3)$ mit $\lambda = -9$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
  - $D(15,-3,-9) = -18 < 0$, also $(15,-3)$ lokales Maximum von f unter NB.
  - $D(-3,3,9) = 18 > 0$, also $(-3,3)$ lokales Minimum von f unter NB.

Z 3

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokale Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x,y) = 4 \cdot x + 8 \cdot y$ unter NB $\quad 2 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 = 6$

(b) $f(x,y) = x + y$ unter NB $\quad x^2 + 2 \cdot y^2 = 24$

Ergebniskontrolle:

zu (a):

- stationäre Punkte $P1 = (-1,-1)$ mit $\lambda = 1$ und $P2 = (1,1)$ mit $\lambda = -1$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
  - $D(-1,-1,1) = 1 \cdot 4 \cdot (-8)^2 + 0 + 1 \cdot 8 \cdot (-4)^2 > 0$, also $(-1,-1)$ lokales Minimum von f unter NB.
  - $D(1,1,-1) = (-1) \cdot 4 \cdot 8^2 + 0 + (-1) \cdot 8 \cdot 4^2 < 0$, also $(1,1)$ lokales Maximum von f unter NB.

zu (b):

- stationäre Punkte $P1 = (-4,-2)$ mit $\lambda = 1/8$ und $P2 = (4,2)$ mit $\lambda = -1/8$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
  - $D(-4,-2,1/8) = 48 > 0$, also $(-4,-2)$ lokales Minimum von f unter NB.
  - $D(4,2,-1/8) = -48 < 0$, also $(4,2)$ lokales Maximum von f unter NB.