

Aufgaben 3D-Extrema unter Gleich-Null Nebenbedingung**A 44**

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokale Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x, y) = 4 \cdot x^3 + 2 \cdot y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) unter NB $6 \cdot x + y = 12$

(b) $f(x, y) = 6 \cdot x + 4 \cdot y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) unter NB $x^3 + 2 \cdot y = 5$

(c) $f(x, y) = x^3 \cdot e^{y+2}$ ($x > 0, y \in \mathbb{R}$) unter NB $x + y = 1$

T 48

An welchen Stellen können die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) lokale Extrema annehmen? Welche Art von lokalem Extremum liegt jeweils vor? Welche Funktionswerte werden angenommen?

(a) $f(x, y) = x \cdot y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) unter NB $x - 3 \cdot y = 24$

(b) $f(x, y) = x^2 + 2 \cdot y^2$ ($x, y \in \mathbb{R}$) unter NB $x + y = 12$

(c) $f(x, y) = 2 \cdot x^{1/2} + 20 \cdot y$ ($x > 0, y \in \mathbb{R}$) unter NB $x + 20 \cdot y = 21$

T 49

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokalen Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x, y) = (1/5) \cdot x^5 + 2 \cdot y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) unter NB $2 \cdot x + 4 \cdot y = 10$

(b) $f(x, y) = x^5 + 10 \cdot y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) unter NB $8 \cdot x + y = 4$

T 50

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokalen Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x, y) = 4 \cdot x + 2 \cdot y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) unter NB $2 \cdot x^2 + y^2 = 12$

(b) $f(x, y) = y \cdot x^2$ ($x, y \in \mathbb{R}$) unter NB $2 \cdot x + y = 9$

(c) $f(x, y) = y^3 \cdot e^{x+2}$ ($x \in \mathbb{R}, y > 0$) unter NB $x + y = 1$

Z 1

An welchen Stellen können die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) lokale Extrema annehmen? Welche Art von lokalem Extremum liegt vor? Welche Funktionswerte werden angenommen?

(a) $f(x, y) = x^2 - 2 \cdot x \cdot y$ unter NB $y = 2 \cdot x - 6$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 1$ unter NB $2 \cdot x + y = 12$

(c) $f(x, y) = x + 20 \cdot y$ unter NB $x^{1/2} + y = 30$

Ergebniskontrolle:

zu (a):

- einziger stationärer Punkt $P_1 = (2, -2)$ mit $\lambda = -4$
- $D(2, -2, -4) = -6 < 0$, also $(2, -2)$ lokales Maximum von f unter NB.

zu (b):

- einziger stationärer Punkt $P_1 = (5, 2)$ mit $\lambda = -4$
- $D_0(5, 2, -4) = 10 > 0$, also $(5, 2)$ lokales Minimum von f unter NB.

zu (c):

- einziger stationärer Punkt $P_1 = (100, 20)$ mit $\lambda = -20$
- $D(100, 20, -20) = 5/1000 > 0$, also $(100, 20)$ lokales Minimum von f unter NB.

Z 2

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokale Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x, y) = x + y^3$ unter NB $2 \cdot x + 6 \cdot y = 8$

(b) $f(x, y) = 4 \cdot x + y^3$ unter NB $x + 3 \cdot y = 5$

(c) $f(x, y) = 9 \cdot x + y^3$ unter NB $x + 3 \cdot y = 6$

Ergebniskontrolle:

zu (a):

- stationäre Punkte $P1 = (7, -1)$ und $P2 = (1, 1)$ mit $\lambda = -1/2$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
 - $D(7, -1, -1/2) = -24 < 0$, also $(7, -1)$ lokales Maximum von f unter NB.
 - $D(1, 1, -1/2) = 24 > 0$, also $(1, 1)$ lokales Minimum von f unter NB.

zu (b):

- stationäre Punkte $P1 = (11, -2)$ und $P2 = (-1, 2)$ mit $\lambda = -4$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
 - $D(11, -2, -4) = -12 < 0$, also $(11, -2)$ lokales Maximum von f unter NB.
 - $D(-1, 2, -4) = 12 > 0$, also $(-1, 2)$ lokales Minimum von f unter NB.

zu (c):

- stationäre Punkte $P1 = (15, -3)$ und $P2 = (-3, 3)$ mit $\lambda = -9$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
 - $D(15, -3, -9) = -18 < 0$, also $(15, -3)$ lokales Maximum von f unter NB.
 - $D(-3, 3, 9) = 18 > 0$, also $(-3, 3)$ lokales Minimum von f unter NB.

Z 3

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokale Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x, y) = 4 \cdot x + 8 \cdot y$ unter NB $2 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 = 6$

(b) $f(x, y) = x + y$ unter NB $x^2 + 2 \cdot y^2 = 24$

Ergebniskontrolle:

zu (a):

- stationäre Punkte $P1 = (-1, -1)$ mit $\lambda = 1$ und $P2 = (1, 1)$ mit $\lambda = -1$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
 - $D(-1, -1, 1) = 1 \cdot 4 \cdot (-8)^2 + 0 + 1 \cdot 8 \cdot (-4)^2 > 0$, also $(-1, -1)$ lokales Minimum von f unter NB.
 - $D(1, 1, -1) = (-1) \cdot 4 \cdot 8^2 + 0 + (-1) \cdot 8 \cdot 4^2 < 0$, also $(1, 1)$ lokales Maximum von f unter NB.

zu (b):

- stationäre Punkte $P1 = (-4, -2)$ mit $\lambda = 1/8$ und $P2 = (4, 2)$ mit $\lambda = -1/8$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
 - $D(-4, -2, 1/8) = 48 > 0$, also $(-4, -2)$ lokales Minimum von f unter NB.
 - $D(4, 2, -1/8) = -48 < 0$, also $(4, 2)$ lokales Maximum von f unter NB.