

Bezeichnung: G = Geldeinheit/Stückelung (z.B. 1G = 1000 Euro)

Eine Skizze des zeitlichen Ablaufs (Zeitpunkte, Zahlungen, Faktoren) kann bei fast allen Aufgaben sehr hilfreich sein.

A 45 Zinseszinsrechnung, Zinsstaffel

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

- (a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_4 um 60% über dem Anfangswert K_0 liegt?
- (b) Gegeben: $i = 25\%$ und ein Zielwert K_x , der 60% über dem Anfangswert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n -ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)
- (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel 20%, 20%, 0%, 44%. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff} .

Hilfswerte: $1.6^{\frac{1}{4}} \approx 1.13$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.6 \approx 0.47$, $144^2 = 20736$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

A 46 Jährliche Zinseszinsen

Gefragt: Endwerte der gegebenen Anlageform $A - D$
Barwerte (nur bei Anlageformen ohne Zinsstaffel)
Effektiver Zinssatz bei Anlageform B

Geg.: Laufzeit $n = 2$ Jahre, Einzahlungen vorschüssig, jährliche Verzinsung

- (A) 2 G zu Beginn mit $i = 3\%$;
- (B) 2 G zu Beginn mit „Zinsstaffel“ $i_1 = 2\%$, $i_2 = 4\%$;
- (C) 1 G jährlich mit „Zinsstaffel“ $i_i = 4\%$; $i_2 = 3\%$ bzw. $i_1 = 3\%$, $i_2 = 4\%$;
- (D) 1 G jährlich mit $i = 3\%$ (konstant)

A 47 Ratenendwert, Rentenbarwert

Ein Betrag K soll – ohne Startkapital – jährlich vorschüssig über 10 gleiche Raten der Höhe A angespart werden um dann ab dem folgenden Jahr durch eine vorschüssige jährlich Rente der Höhe R in 5 Jahren aufgebraucht zu werden. Kalkulationszins $i = p\%$ (fest, aber zunächst nicht näher festgelegt).

Gegeben (als Ziel): Rentenhöhe $R > 0$

Gefragt:

- (a) Ratenhöhe A in Abhängigkeit von R und q , wobei $q = 1 + i$, d.h. gefragt ist eine Gleichung $A = ?$, wobei rechts vom Gleichheitszeichen nur die Symbole R und q auftreten (bitte hierbei möglichst gut zusammenfassen/auskürzen).
- (b) Welcher Wert ergibt sich damit (approximativ) für A , wenn nun konkret $i = 4.5\%$ und $R = 56$ G festgelegt sind?

[Hilfswerte $1.045^5 \approx 1.25$, $1.045^{10} \approx 1.55$, $1.045^{15} \approx 1.94$]

A 48 *Ratenkauf, jährliche Verzinsung*

Ratenkauf mit konstanter jährl. Rate A und jährl. Zinssatz i : Vertragsdauer n Jahre, der Vertrag beginnt mit Zahlung der ersten Rate und endet mit Zahlung der letzten Rate.

- (a) Berechnen Sie den *Kauf-Endwert*, d.h. den Endwert des Ratenkaufs (Endwert einschl. der letzten Rate)
- (b) Berechnen Sie den *Kauf-Barwert*, d.h. den Barwert des Ratenkaufs (Barwert einschl. der ersten Rate)
- (c) Welche *relative* Preisveränderung bedeutet der Ratenkauf gegenüber der Einmal-Zahlung des Betrags $K = (n + 1) \cdot A$ zum Vertragsbeginn?

Bezeichnung: G = Geldeinheit/Stückelung (z.B. $1G = 1000 \text{ Euro}$)

Eine Skizze des zeitlichen Ablaufs (Zeitpunkte, Zahlungen, Faktoren) kann bei fast allen Aufgaben sehr hilfreich sein.

T 51 *Zinseszinsrechnung, Zinsstaffel*

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

- (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 20% über dem Anfangswert K_0 liegt?
- (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x , der 20% über dem Anfangswert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n -ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)
- (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel 10%, 0%, 10%, 21%, 10%. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff} .

Hilfswerte: $1.2^{\frac{1}{5}} \approx 1.04$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $11^5 = 161051$, $\ln 1.1 \approx 0.1$

T 52 *Jährliche Verzinsung (Zinseszins)*

Gefragt: Endwerte der gegebenen Anlageform $A - D$
Barwerte (nur bei Anlageformen ohne Zinsstaffel)
Effektiver Zinssatz bei Anlageform B

Geg.: Laufzeit $n = 4$ Jahre, Einzahlungen vorschüssig, jährliche Verzinsung

- (A) 10 G zu Beginn mit $i = 5\%$;
- (B) 10 G zu Beginn mit „Zins-Staffel“ $i_1 = 4\%$, $i_2 = 5\%$, $i_3 = 5\%$, $i_4 = 6\%$
- (C) 2.5 G jährlich mit $i = 6\%$ (konstant)

T 53 *Ratenendwert, Rentenbarwert*

Ein Betrag K soll – ohne Startkapital – jährlich vorschüssig über 10 gleiche Raten der Höhe A angespart werden um dann ab dem folgenden Jahr durch eine vorschüssige jährliche Rente der Höhe R in 5 Jahren aufgebraucht zu werden. Kalkulationszins $i = p\%$ (fest, aber zunächst nicht näher festgelegt).

Gegeben (als Ziel): Rentenhöhe $A > 0$

Gefragt:

- (a) Rentenhöhe R in Abhängigkeit von A und q , wobei $q = 1 + i$, d.h. gefragt ist eine Gleichung $R = ?$, wobei rechts vom Gleichheitszeichen nur die Symbole A und q auftreten (bitte hierbei möglichst gut zusammenfassen/auskürzen).
- (b) Welcher Wert ergibt sich damit für A , wenn $i = 3\%$ und $R = 670$ G konkret festgelegt sind?

Zusatzfrage: Wenn die Ansparphase und die Rentenphase im Unterschied zu oben beide gleiche Dauer $n = 10$ haben, ergibt sich $R/A = 1.03^{10} \approx 1.34$, also $A = 670/1.03^{10} \approx 500$. Rechnen Sie dies nach und begründen Sie anhand einer Skizze, wie dies auch sofort (ohne zu rechnen) eingesehen werden kann.

[Hilfswerte $1.03^5 \approx 1.16$, $1.03^{10} \approx 1.34$, $1.03^{15} \approx 1.56$]

T 54 *Ratenkauf, jährliche Verzinsung*

Ratenkauf mit konstanter jährl. Rate A : Vertragsdauer 3 Jahre, der Vertrag beginnt mit Zahlung der ersten Rate und endet mit Zahlung der letzten Rate, Kalkulationssatz $i = 5\%$. Bei welcher Ratenhöhe A bedeutet der Ratenkauf eine Preiserhöhung von 3% gegenüber dem *Bar-Kaufwert* K (d.h. dem Barwert K des Ratenkaufs \triangleright A 48 (b))?