

Mathematik für Ökonomen - Themen

ARBEITSUNTERLAGEN

für Studierende des Bachelorstudiengangs BWL
an der Mercator School of Management
der Universität Duisburg-Essen

konzipiert und erstellt von

Hermann Hoch (Dipl.-Volksw., Dipl.-Math., Dr. rer. nat.)

überarbeitet von

Volker Krätschmer

unter Mitarbeit von

Bastian Becker, Sabine Christ, Armin Massmann

gelesen von

Prof. Dr. Volker Krätschmer

Universität Duisburg-Essen, Campus Duisburg, SS 24

Vorbemerkungen

- Dies ist die Gesamtausgabe der Arbeitsmaterialien, die den geplanten Unterrichtsstoff der Vorlesung umfaßt. Die vorliegende Version ist vorläufig. Aktuelle (überarbeitete, korrigierte) Fassungen finden Sie unter

<http://www.uni-due.de/mathematik/mathoek-duisburg/>

- **Warnung:**

Die Arbeitsmaterialien sind **kein** Lehrbuch! Sie sollen die Hörer der Vorlesung *Mathematik für Ökonomen* vom ablenkenden und oft fehlerhaften Mitschreiben von Formeln entlasten und es ihnen erleichtern, sich auf die in der Vorlesung vorgetragenen Motivationen und Erläuterungen zu konzentrieren und hierüber individuelle Notizen anzufertigen.

- **Empfehlung:**

Die Vorlesung und Arbeitsmaterialien sind nach Unterrichtseinheiten gegliedert, sogenannten *Themen*. Separate, herunterladbare Dateien zu jedem Thema sind unter der oben angegebenen Adresse zu finden. Es wird empfohlen, die Vorlesungen zu den Unterrichtseinheiten zu besuchen. In Ihnen wird der dichte Text der Arbeitsmaterialien aufbereitet, der Unterrichtsstoff durch Behandlung von Beispielen motiviert und das Verständnis durch Rechnen ausgewählter Übungsaufgaben vertieft. Erfahrungsgemäß lassen sich erst auf diese Weise die Arbeitsmaterialien mit Gewinn nutzen.

- Diese Unterlagen sind nur zum persönlichen Gebrauch bestimmt. Sie dürfen von anderer Seite nicht angeboten oder verbreitet werden (z.B. Internet, andere Medien wie CD, DVD). Auch eine gewerbliche Nutzung (z.B. durch kostenpflichtige Nachhilfeinstitute) ist nicht erlaubt.

Inhalt

Vorbemerkungen

Thema 1 **Grundlagen**

Thema 2 **Umformung von Gleichungen und lineare Ungleichungen**

Themen 3

Thema 3.1 **Elementare Matrizenrechnung**

Thema 3.2 **Lineare Gleichungssysteme I (Matrixgleichungen)**

Thema 3.3 **Lineare Gleichungssysteme II (Gauß-Jordan-Algorithmus)**

Thema 4 **Zahlenfolgen und deren Grenzwerte**

Thema 5 **Differentiation einer Funktion mit einer Veränderlichen**

Thema 6 **Elementare Integration**

Thema 7 **Partielle und totale Betrachtungsweisen**

Themen 8

Thema 8.1 **3D-Extrema**

Thema 8.2 **(3D-)Extrema unter Nebenbedingungen**

Thema 9 **Elementare Zinsrechnung**

Grundlagen (teilweise Schulstoff)

- ▷ teilweise kompakte Wiederholung in Vorlesung/Übung
- ▷ semesterbegleitende Aufarbeitung in den Tutorien

Viele der unten genannten Begriffe sind in folgendem Sinne vorausgesetzt: Zwar werden die wichtigsten Begriffe spätestens an den Stellen, an denen sie erstmals eingesetzt werden, noch einmal besprochen, aber weniger unter rein mathematischen Gesichtspunkten, sondern eher in Hinblick auf Anwendungen. Wichtige Ergebnisse werden danach aber oft nicht detailliert hergeleitet, sondern nur in der benötigten Form notiert und anhand von Beispielen besprochen. Dies ist, wenn der entsprechende Stoffbereich völlig neu für Sie ist, unzureichend und könnte Sie überfordern (beispielsweise die elementare Integralrechnung an nur einem Vormittag). Sie müssen also entsprechend vorbereitet sein, d.h. Ihre Schulkenntnisse aktivieren und aufbereiten oder ggf. den entsprechenden Stoffbereich *rechtzeitig* nachholen.

Ein wichtiger Grund für diese Zusammenfassung ist auch, dass wir (nicht unbedingt einheitlich festgelegte) Schreibweisen und Definitionen wohlbekannter Dinge in einer *einheitlichen Form* sammeln wollen:

Mengen und Aussagen

Symbolik/Sprechweisen, Grundregeln

Zahlenmengen

$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n$, Intervalle in \mathbb{R}, \mathbb{R}^n

Rechenregeln

Potenzregeln, Binomische Formeln

Funktionen

Funktion, Definitions- und Wertebereich, Bild, Urbild, Umkehrfunktion, Monotone Funktionen

Grundfunktionen:

Betrag, Rundungsmethoden, Polynome, Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten, Exponentialfunktion, Logarithmus

Mengen und Aussagen

Aussage A Ein sprachliches Objekt, dem genau eine der beiden Eigenschaften „wahr“ (= 1) oder „falsch“ (= 0) zugeordnet werden kann: A

Symbol	Name	Sprechweise	Wahrheitswert (Festlegungen)
$\neg A$	Negation	nicht A	$w(\neg A) = 1 - w(A)$
$A \wedge B$	Konjunktion	A und B	$w(A \wedge B) = \min(w(A), w(B))$
$A \vee B$	Disjunktion	A oder B	$w(A \vee B) = \max(w(A), w(B))$
$A \Rightarrow B$	Implikation	A impliziert B	$w(A \Rightarrow B) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (w(A) \leq w(B)) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz	A äquivalent B	$w(A \Leftrightarrow B) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w(A) = w(B) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Weitere Zusammensetzungen von Aussagen mit Hilfe dieser Symbole

VORSICHT

Aus einer falschen Aussage (Wahrheitswert 0) kann jede andere gefolgert werden, und eine wahre Aussage (Wahrheitswert 1) kann aus jeder anderen Aussage gefolgert werden.

Kontradiktion eine Aussage, die immer falsch ist

Tautologie eine Aussage, die immer wahr ist

1 Ist eine Implikation $A \Rightarrow B$ wahr, so heißt A **hinreichende Bedingung für B** und B **notwendige Bedingung für A**

Definitionssymbole

$:=$ **Linke Seite** := **Rechte Seite** bedeutet

das Objekt auf der linken Seite „ergibt sich aus“ der rechten Seite

$:\Leftrightarrow$ **bzw. Linke Seite** $:\Leftrightarrow$ **Rechte Seite** bedeutet

das Objekt links „wird definiert durch“ die Angaben rechts

Menge Zusammenfassung bestimmter (realer oder gedachter) wohl unterschiedener Objekte (aus einem festen Bereich) zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen dann **Elemente der Menge**.

$x \in M$ x ist **Element der Menge**

$x \notin M$ x ist **nicht Element der Menge M**

Angabe einer Menge durch Aufzählen (nicht immer möglich)

$$M := \{3, III, \textcircled{3} \text{ drei, try}\}, \emptyset := \{\} (\text{leere Menge}), \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

Angabe einer Menge durch Angabe der *mengenbildenden* Eigenschaft

$$M := \{x \in \text{Grundmenge: Eigenschaft von } x\}, \mathbb{G} := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$$

VORSICHT

Die Objekte einer Menge sind *verschieden*. Nur durch setzen von geschweiften Klammern um eine Aufzählung von Zahlen entsteht nicht notwendig eine Menge: $\{1, 2, 1\}$ ist keine Menge, aber z.B. eine „Liste“ oder eine „indizierte Menge“ siehe ▷ Informatik

Vergleich von Mengen A, B

$A \subset B$ A ist **Teilmenge von B** , wenn jedes Element von A auch Element von B ist. $(x \in A \Rightarrow x \in B)$
 A ist *echte Teilmenge* von B , wenn $A \subset B$ und es ein Element von B gibt, das nicht zu A gehört

$A = B$ $B \subset A$ und $A \subset B$ $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
 Jedes Element von B ist auch Element von A und umgekehrt

Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge!

Mengenoperationen

$A \cup B$ **Vereinigungsmenge von A und B**
 $A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$

$A \cap B$ **Schnittmenge von A und B**
 $A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$

$A \setminus B$ **Differenzmenge, besser: Komplement von B in A**
 $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$

\overline{B} **Komplement von B (in einer festen Grundmenge X)**
 $\overline{B} := \{x \in X : x \notin B\} = X \setminus B$

Zwei Mengen A, B heißen **disjunkt**, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben: $A \cap B = \emptyset$. Mehrere Mengen heißen *paarweise disjunkt*, wenn je zwei (alle möglichen Paare) dieser Menge disjunkt sind. Im Falle der Vereinigung paarweise disjunkter Mengen wird häufig das Symbol \uplus statt \cup verwendet.

Oft interessieren bei Argumentationen mit Mengen weniger deren einzelne Elemente selbst, sondern eher nur deren Anzahl:

Schreibweise $\#(A) :=$ Elementanzahl der Menge A

Das Wort Anzahl setzt voraus, dass die Menge auch „abgezählt“ werden kann:

Endliche Menge M:	Elemente zählbar mittels $\{1, 2, \dots, n\}$ für eine natürliche Zahl n; $\#(M) := n$.
Abzählbar unendliche Menge M:	Nicht endlich, aber Elemente zählbar mittels $\{1, 2, 3, \dots\}$; $\#(M) := \infty$.
Überabzählbare Menge M:	weder endliche, noch abzählbar unendliche Menge; $\#(M)$ nicht definiert.

∞ Lemniskate, Symbol für das Unendliche, eine ideale „Zahl“, die nicht zu \mathbb{R} gehört

$\infty + \infty := \infty$, $\infty \pm n := \infty$ für $n \in \mathbb{N}$, $\infty - \infty$ nicht definiert

Zahlenmengen

Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{m/k : m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R} =$ Menge aller Grenzwerte von (allen) Folgen rationaler Zahlen siehe ▷ Folgen und Grenzwerte, Thema 4

Die Grenzwerteigenschaft bedeutet, dass jede reelle Zahl beliebig gut – nach Vorgabe einer Genauigkeit (z.B. 10^2) – durch rationale Zahlen, insbesondere eine endliche Dezimalzahl, approximiert werden kann, z.B.

$\sqrt{2} \approx 1.4142$, $1/\sqrt{2} \approx 0.7071$, $\sqrt{3} \approx 1.7321$, $e \approx 2.71828$, $e^{-1} \approx 0.3678$, $\ln 2 \approx 0.69$, $\ln 10 \approx 2.3$, $\pi \approx 3.1415$ oder so: $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Intervalle in \mathbb{R}	reelle Zahlen a, b mit $a < b$
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	links abgeschl., rechts offenes Interv.
$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	links offenes, rechts abgeschl. Interv.
$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	offenes Intervall
$] - \infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$	linker Halbstrahl
$[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$	rechter Halbstrahl
$] - \infty, \infty[:= \mathbb{R}$	Zahlengerade (Zahlenstrahl)
$[a, a] := \{a\}$	einpunktige Menge, <u>kein</u> Intervall

Bequeme, klare Schreibweise für eingeschränkte Zahlenmengen

Zahlenmenge **Bedingung** $:= \{x \in \text{Zahlenmenge} : x \text{ erfüllt Bedingung}\}$

$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{R}_{<0} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, entsprechend $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}_{\leq 0}$

VORSICHT beim Lesen der beliebigen Symbole \mathbb{R}_+ und \mathbb{R}_- in verschiedenen Quellen: Es ist nicht einheitlich geregelt, ob dabei die Zahl 0 zugezählt wird oder nicht (aber wichtig bei Division, Lösungsmengen)

\mathbb{R}^n **n -Tupel (x_1, \dots, x_n) von reellen Zahlen** **(n -Vektoren)**
 n = Dimension des Tupels ($n \in \mathbb{N}$)
Anordnung: i -te Stelle im Tupel heißt i -te Koordinate

\mathbb{R}^1	= \mathbb{R} , d.h. $(x) := x$ für $x \in \mathbb{R}$		eindimensional
\mathbb{R}^2	= $\{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$	Paare (2-Tupel)	zweidimensional
\mathbb{R}^3	= $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$	Tripel (3-Tupel)	dreidimensional
\mathbb{R}^n	= $\{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$	n -Tupel	n -dimensional

Rechenregeln

2 Potenzen a^m mit ganzzahligen Exponenten

$$a, b \in \mathbb{R}_{\neq 0} \text{ und } n, m \in \mathbb{Z}$$

$$a^0 = 1, a^{n+m} = a^n \cdot a^m, (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, a^{n \cdot m} = (a^n)^m$$

n -te Wurzeln/allgemeinere Exponenten: siehe ▷ Grundfunktionen

$$2^6 = 2^0 2^6 = 2^1 2^5 = 2^2 2^4 = 2^3 2^3 = (2^3)^2 = (2^2)^3, 1 = 6^0 = (6^3)^0 = (6^0)^3$$

3 Binomische Formeln

$$(a^2 \pm 2ab + b^2) = (a \pm b)^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Anwendung zur Umrechnung von Differenzen

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b} \text{ für } a + b \neq 0$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

4 Fakultät, Binomialkoeffizient

$0! = 1$, $n! = 1 \cdot \dots \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$ Bsp. $10! = 3628800$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n \quad \text{„n über k“}$$

= Anzahl Möglichkeiten, k von n Objekten auszuwählen

Allgemeine binomische Formel

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

insbesondere ist (für $a = b = 1$): $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

Funktionen

5 Funktionen

Eine Funktion f ist eine Zuordnung von Elementen einer Menge $D(f)$ auf jeweils genau ein Element aus einer Menge Y

$$f : D(f) \rightarrow Y : x \mapsto y = f(x)$$

$D(f)$ heißt **Definitionsbereich** von f

Y heißt **Wertevorrat** von f

$W(f) := \{f(x) : x \in D(f)\}$ heißt **Wertebereich** von f

In den meisten ökonomischen Anwendungen haben wir $D(f) \subset \mathbb{R}^n$ und $W(f) \subset \mathbb{R}$.

6 Umkehrbare Funktionen und ihre Umkehrfunktion

Eine Funktion $f : D(f) \rightarrow W(f)$ heißt **umkehrbar**, falls jedes $y \in W(f)$ Wert $f(x)$ von genau einem $x \in D(f)$ ist.

Zu einer umkehrbaren Funktion $f : D(f) \rightarrow W(f)$ kann eine neue Funktion gebildet werden

$$f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f) : y = f(x) \mapsto x = f^{-1}(y).$$

Sie heißt **Umkehrfunktion**, Symbol: f^{-1} . Es gilt

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Eine Umkehrfunktion ist wieder umkehrbar, bei erneuter Umkehrung entsteht die ursprüngliche umkehrbare Funktion: $(f^{-1})^{-1} = f$

„Bestimmung“ der Umkehrfunktion

Methode 1 *(nicht immer möglich)*

Eindeutiges Auflösen der Funktionsvorschrift $y = f(x)$ nach x

Methode 2 *(wenn Methode 1 versagt)*

Z.B. mit Hilfe eines Kriteriums (s.u.) weist man/frau nach, dass die Funktion umkehrbar (eindeutig) ist und kann dann mit f^{-1} „rechnen“, Wertebestimmung meist iterativ mit Hilfe

der Gleichung $f(f^{-1}(x)) = x$ (methodisches Probieren). Wichtige solcher Umkehrfunktionen bekommen einen eigenen Namen/ein eigenes Symbol, z.B. ist \sqrt{x} (mit $D(\sqrt{\cdot}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$), definiert als Umkehrfunktion der Funktion $f(x) := x^2$ (mit $D(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$).

7 Jede umkehrbare Funktion erfüllt für alle $x, y \in D(f)$:

$$x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

8 Monotone Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

$I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall

f monoton wachsend in I $:\Leftrightarrow$

für alle $x, y \in I$ gilt: $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

äquivalent: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

f monoton fallend in I $:\Leftrightarrow$

für alle $x, y \in I$ gilt: $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

äquivalent: $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

f streng monoton wachsend in I $:\Leftrightarrow$

für alle $x, y \in I$ gilt: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

äquivalent: $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$ (MF 1)

äquivalent: $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$ (MF 2)

f streng monoton fallend in I $:\Leftrightarrow$

für alle $x, y \in I$ gilt: $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

äquivalent: $x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$ (MF 3)

äquivalent: $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$ (MF 4)

Gleichungen (MF 1)-(MF 4) sind nützlich zur Umformung von Ungleichungen.

9 Monotoniekriterium

Eine streng monoton wachsende bzw. fallende Funktion f ist umkehrbar.

Ist z.B. $D(f) = [a, b]$ ein Intervall und f strikt monoton ...

... wachsend, dann ist $W(f) = D(f^{-1}) = [f(a), f(b)]$

... fallend, dann ist $W(f) = D(f^{-1}) = [f(b), f(a)]$

In beiden Fällen ist $W(f^{-1}) = D(f) = [a, b]$

10 Grundfunktionen I

$$\text{Betrag} \quad |x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad \text{und } x \in \mathbb{R}$$

Aufrunden $\lceil x \rceil :=$ aufrunden von x zur nächsten ganzen Zahl,
 $x \in \mathbb{R}$

Abrunden $\lfloor x \rfloor :=$ abrunden von x zur nächsten ganzen Zahl,
 $x \in \mathbb{R}$

Runden $\lceil x \rceil :=$ runden von x zur nächsten ganzen Zahl,
 $x \in \mathbb{R}$
(Übliche Festlegung des Grenzfalls der Mitte
 $x = \frac{k+(k+1)}{2}$ zwischen zwei ganzen Zahlen:
Aufrunden (auf $k + 1$))

Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit Koeffizienten a_0, \dots, a_n ; $a_n \neq 0$

$$f(x) := a_0 x^0 + \dots + a_n x^n, \quad D(f) = \mathbb{R}$$

$f(x) = a_0$	<i>konstante Funktion</i>
$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x, a_1 \neq 0$	<i>Gerade (affine lineare Funktion)</i>
$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2, a_2 \neq 0$	<i>quadratische Funktion</i>
$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3, a_3 \neq 0$	<i>kubische Funktion</i>

Ein Polynom n -ten Grades hat höchstens n verschiedene Nullstellen

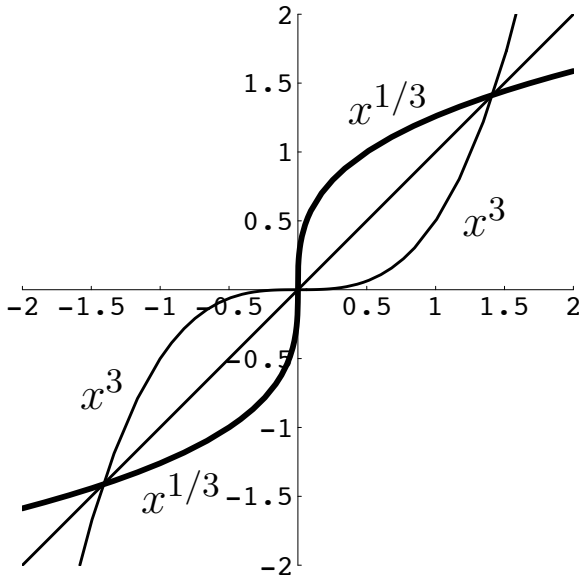
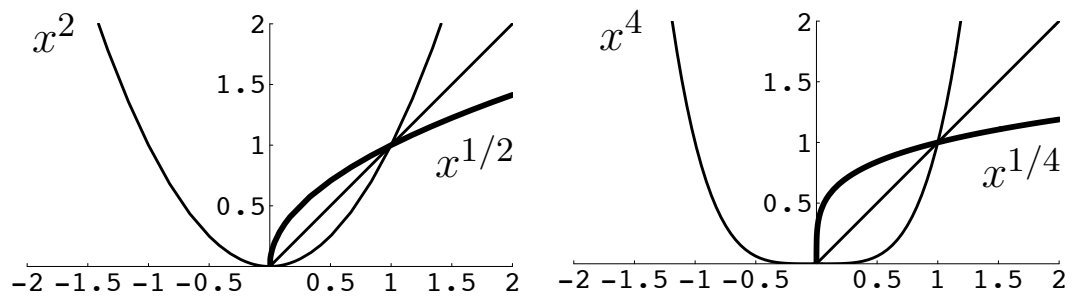
11 Grundfunktionen II

k -te Wurzel $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^{1/k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ gerade

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^{1/k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ ungerade

$x^{1/k}$ ist eine Bezeichnung für die Umkehrfunktion der Potenzfunktion

$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^k$ (k gerade), $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^k$ (k ungerade)

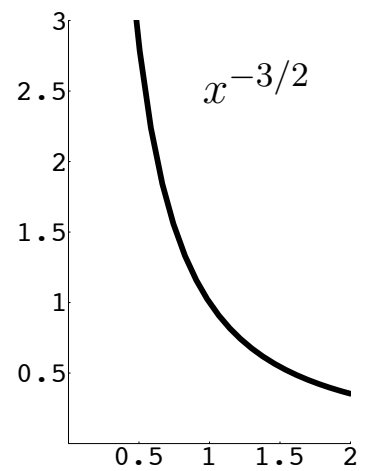
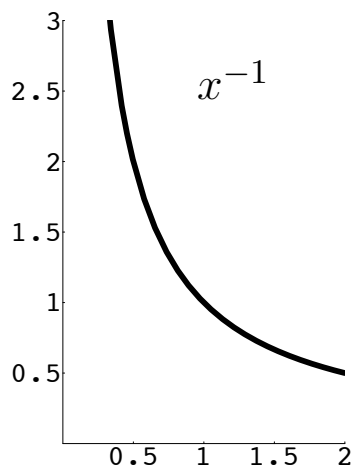
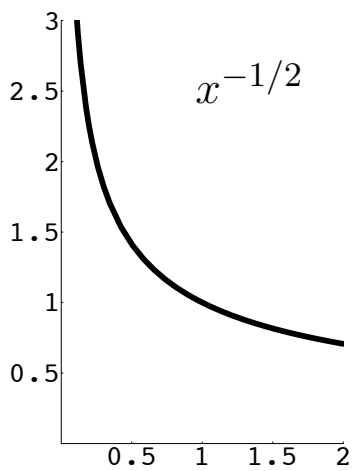
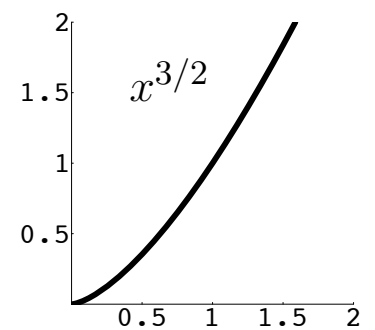
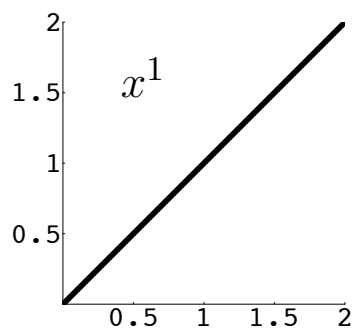
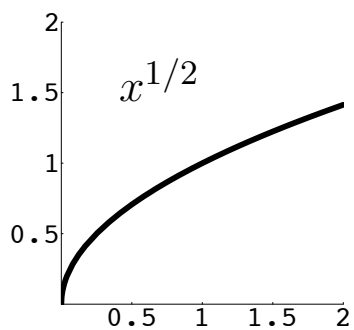


Potenzfunktionen x^r mit rationalen Exponenten $r = m/k$

$$f(x) = x^{m/k} \text{ mit } k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, D(f) = \mathbb{R}_{>0}$$

Zusammengesetzte Funktion $x \mapsto x^{1/k} \mapsto (x^{1/k})^m$, eine *negative* Potenz ist hierbei definiert als Kehrwert der entsprechenden positiven Potenz.

Beispiel



12 Potenzregeln mit rationalen Exponenten

Für $a, b > 0$ und $s, t \in \mathbb{Q}$ ist $a^0 = 1$ und

$$a^{s \cdot t} = (a^s)^t, \text{ insbesondere } a^{-t} = 1/a^t \quad \textit{Faktorisierung des Exponenten}$$

$$b^{s+t} = b^s \cdot b^t \quad \textit{gleiche Basis}$$

$$(a \cdot b)^t = a^t \cdot b^t, \text{ insbesondere } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \textit{gleicher Exponent}$$

13 Grundfunktionen III

Exponentialfunktion e^x

andere Schreibweise: $\exp(x)$

Wichtige Funktion zum (theoretischen) Rechnen bei der Analyse von Änderungen und grenzwertigem Verhalten eines Modells

▷ stetige Verzinsung, Wachstumsfunktionen, statistische Schätzung

Bsp. (Unterjährige und stetige Verzinsung)

Ein Guthaben von 10000 Euro soll zu $i = 5\%$ jährlich verzinst werden. Nach Auszahlung am Ende des Jahres beträgt das verzinste Guthaben $K = 10000 \cdot (1+i) = 10000 \cdot (1 + \frac{5}{100}) = 10500$ Euro. Es sind allerdings auch andere Auszahlungsmodi möglich, bei denen Auszahlungen in kürzeren Abständen erfolgen. So etwas wird *unterjährige Verzinsung* genannt. Mögliche Beispiele:

- **monatliche Verzinsung:** monatliche Auszahlung

Die Verzinsung wird durch 12 geteilt, verzinste Guthaben nach 1 Jahr

$$K = 10000 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} = 10000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100 \cdot 12}\right)^{12} \approx 10511.62 \text{ Euro.}$$

- **wöchentliche Verzinsung:** wöchentliche Auszahlung

Die Verzinsung wird durch 52 geteilt, verzinste Guthaben nach 1 Jahr

$$K = 10000 \cdot \left(1 + \frac{i}{52}\right)^{52} = 10000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100 \cdot 52}\right)^{52} \approx 10512.46 \text{ Euro.}$$

- **tägliche Verzinsung:** tägliche Auszahlung

Die Verzinsung wird durch 365 geteilt, verzinste Guthaben nach 1 Jahr

$$K = 10000 \cdot \left(1 + \frac{i}{365}\right)^{365} = 10000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100 \cdot 365}\right)^{365} \approx 10512.67 \text{ Euro.}$$

- **Verzinsung in m-Teile:** m -malige Auszahlung

Die Verzinsung wird durch m geteilt, verzinste Guthaben nach 1 Jahr

$$K = 10000 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = 10000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100 \cdot m}\right)^m \text{ Euro.}$$

Wird nun eine hochfrequente Auszahlung (= sehr grosses m) vorgenommen, so weiss man, dass der Wert $\left(1 + \frac{5}{100 \cdot m}\right)^m$ sich in der Nähe von $e^{5/100}$ (= dem Wert der Exponentialfunktion an der Stelle $5/100$) „einpendelt“. Von *stetiger Verzinsung* spricht man, wenn ideell permanent ausgezahlt würde. In dem Fall wäre das verzinste Guthaben auf $K = 10000 \cdot e^{5/100}$ angewachsen.

Definition Für jedes $x \in \mathbb{R}$ kann der Funktionswert der Exponentialfunktion an der Stelle x definiert werden sowohl als Grenzwert wie im Beispiel der stetigen Verzinsung als auch als Grenzwert eines Polynomtyps:

$$e^x := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^0}{0!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

▷ Thema 4

Definitionsbereich \mathbb{R} und Wertebereich $\mathbb{R}_{>0}$

Rechner verwenden folgende Näherung

$$e^x \approx \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \text{ für „große“ } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

Diese ist schon für relativ kleine n gut brauchbar.

Eulersche Zahl

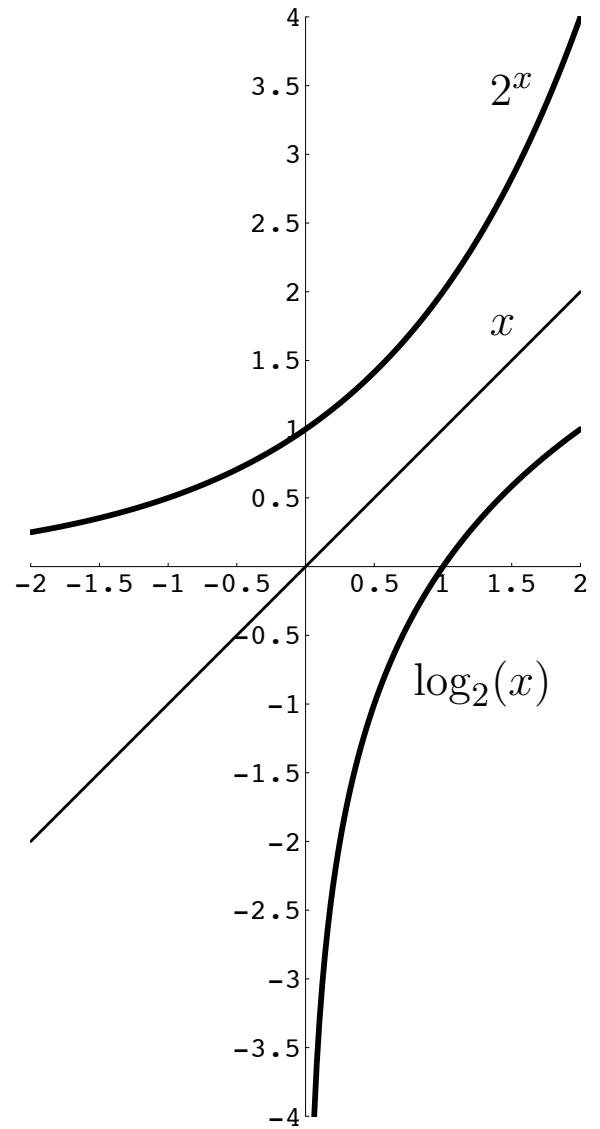
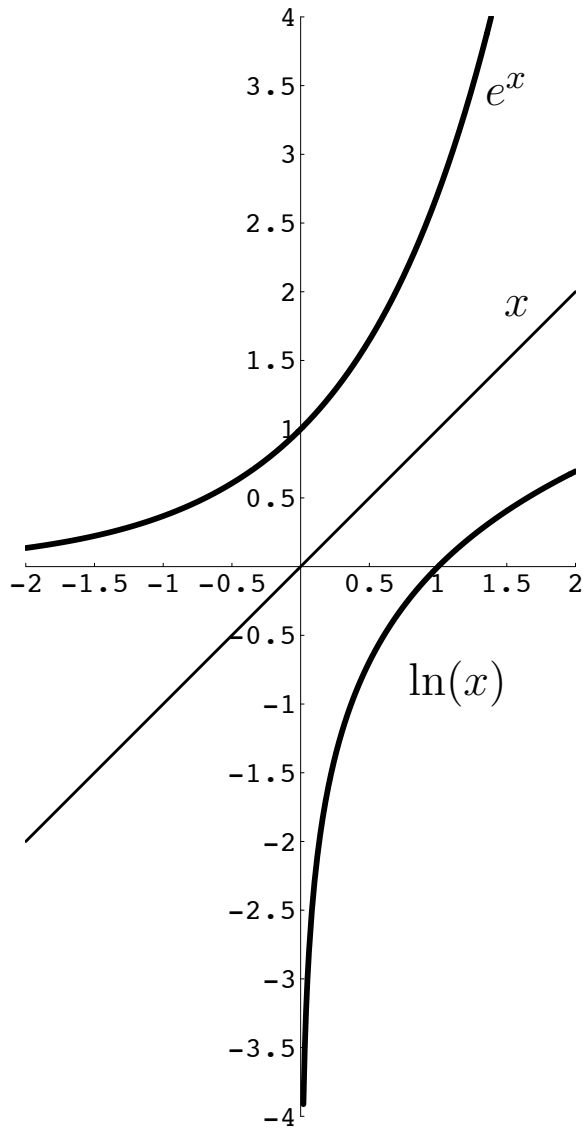
$$e := e^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{0!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \approx 2.71828$$

Die Zuordnungsvorschrift der Exponentialfunktion ist erst nach Thema 4 verstehbar. Für das Arbeiten mit der Exponentialfunktion **reicht vollständig die Kenntnis** von

Definitionsbereich, Wertebereich, grobem Funktionsverlauf, wichtigen Eigenschaften

Im Verlauf des Semesters werden die nötigen Eigenschaften nach und nach eingeführt. In Thema 1 erste Angaben zum *Graph* und *Monotonieverhalten* sowie die Formulierung der *Basisrechenregeln*.

<i>Basiseigenschaft</i>	streng monoton wachsend	
<i>Rechenregeln</i>	$(e^t)^s = e^{t \cdot s}$	für $s, t \in \mathbb{R}$
	$e^{t+s} = e^t \cdot e^s$	für $s, t \in \mathbb{R}$
<i>insbesondere</i>	$e^0 = 1; e^{-t} = 1/e^t; e^t/e^s = e^{t-s}$	für $s, t \in \mathbb{R}$



Natürlicher Logarithmus $\ln =$ Umkehrfunktion von e^x

Definitionsbereich $\mathbb{R}_{>0}$ und Wertebereich \mathbb{R}

$$\ln(e^x) = x = e^{\ln x}$$

Basiseigenschaft **streng monoton wachsend**

Rechenregeln $\ln(c) + \ln(d) = \ln(c \cdot d)$ für $c, d > 0$

$\ln(c^t) = t \cdot \ln(c)$ für $c > 0, t \in \mathbb{Q}$

insbesondere $\ln(1) = 0; \ln(e) = 1; \ln\left(\frac{c}{d}\right) = -\ln\left(\frac{d}{c}\right)$ für $\frac{c}{d} > 0$

Bsp. a) $\ln(3/4) = \ln(3) - \ln(4)$

b) Für $x, y, z > 0$ ist $\ln(x^{1/7} \cdot y^{-2/3} \cdot z^{2/5}) = \frac{1}{7} \ln(x) - \frac{2}{3} \ln(y) + \frac{2}{5} \ln(z)$

Allgemeine Exponentialfunktion zur Basis $b > 0$

$$b^x := e^{x \ln b}$$

Definitionsbereich \mathbb{R} und Wertebereich $\mathbb{R}_{>0}$

Bsp. a) $2^x = e^{x \ln 2}, 2^{1/10} = e^{(1/10) \ln 2} \approx 1.07177$

b) $2^n =$ Anzahl Möglichkeiten bei n Bit, $2^{32} = 4294967296$

erweiterte Rechenregel für natürlichen Logarithmus: $\ln(c^t) = t \cdot \ln(c)$ für $c > 0, t \in \mathbb{R}$

Bsp. $1.05^x = 2 \Leftrightarrow \ln(1.05^x) = \ln 2 \Leftrightarrow x \cdot \ln 1.05 = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 1.05}$

14 Allgemeine Potenzregeln

Für $a, b > 0$ und $s, t \in \mathbb{R}$ ist $a^0 = 1$ und

$$a^{s \cdot t} = (a^s)^t \quad \text{Faktorisierung des Exponenten}$$

$$b^{s+t} = b^s \cdot b^t, \text{ insbesondere } e^{s+t} = e^s \cdot e^t \quad \text{gleiche Basis}$$

$$(a \cdot b)^t = a^t \cdot b^t, \text{ insbesondere } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{gleicher Exponent}$$

Umformungen von Gleichungen und linearen Ungleichungen

Gleichungen und/oder Ungleichungen entstehen bei Modellrechnungen (z.B. Budgetrestriktionen, Gleichgewichtsbedingungen, Extremwertbedingungen).

Ziel: Bestimmung der zugehörigen Lösungsmenge

Vorstufe: Gleichungen/Ungleichungen durch Äquivalenzumformungen in eine auflösbare Form bringen, meist in mehreren Stufen

Umformungen von Gleichungen

Bsp. 1 (Unterjährige und stetige Verzinsung, *Forts. von Grundlagen, Nr. 13*)

Ein Guthaben von 10000 Euro soll durch eine geeignete Verzinsung i nach einem Jahr verdoppelt werden. Wie muß i gewählt werden bei wöchentlicher, täglicher, stetiger Verzinsung?

- **wöchentliche Verzinsung**

Löse Gleichung: $10000 \cdot \left(1 + \frac{i}{52}\right)^{52} = 20000$

- **tägliche Verzinsung**

Löse Gleichung: $10000 \cdot \left(1 + \frac{i}{365}\right)^{365} = 20000$

- **stetige Verzinsung**

Löse Gleichung: $10000 \cdot e^i = 20000$

Bsp. 2 (Anlagelaufzeit)

Ein Guthaben von 10000 Euro soll jährlich mit 5% verzinst werden. Wielange muß das Geld angelegt werden, um sich zu der vorgegebenen Verzinsung verdoppelt? Bedient man sich den Methoden der Zinseszinsrechnung (\triangleright *Thema 9*), so ergibt sich als Ansatz, die Gleichung $\langle 10000 \cdot 1.05^x = 20000 \rangle$ zu lösen.

Bsp. 3 (minimale Kosten)

Die laufenden Kosten eines Start up Unternehmens in Abhängigkeit zum Kapitaleinsatz $x > 1$ läßt sich beschreiben durch die Funktion

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{x}{100000} + \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{100000} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{x}{100000} + \frac{1}{4}\right)^2$$

Der Standardansatz der mathematischen Theorie zur Optimierung von Funktionen mit einer Veränderlichen (\triangleright *Thema 5*) führt die Frage nach den minimalen Kosten darauf zurück, die Gleichung $\langle 4 \cdot \left(\frac{x}{100000} + \frac{1}{4}\right) \cdot \ln\left(\frac{x}{100000} + \frac{1}{4}\right) = 0 \rangle$ zu lösen.

15 Lineare Umformung von Gleichungen $a, b, c, d \in \mathbb{R} (c \neq 0)$

$$\begin{array}{llll}
 a & = & b & \Leftrightarrow a + d = b + d & \text{Addition mit } d \\
 a + d & = & b + d & \Leftrightarrow a = b & \text{Subtraktion mit } d \\
 a & = & b & \Rightarrow a \cdot d = b \cdot d & \text{Multiplikation mit } d \\
 c \cdot a & = & c \cdot b & \Leftrightarrow a = b & \text{Division durch } c
 \end{array}$$

16 Auflösen des Betrags

$$|z| = b \Leftrightarrow (-b = z \text{ oder } z = b) \quad \text{für } b \geq 0, \text{ für } b < 0 \text{ nicht lösbar}$$

Bsp. a) $|x - 3| = 4 \Leftrightarrow -4 = x - 3 \text{ oder } x - 3 = 4 \Leftrightarrow x = -1 \text{ oder } x = 7$

b) Für $c \neq 0$: $|cx| = 5 \Leftrightarrow -5 = cx \text{ oder } cx = 5 \Leftrightarrow x = -5/c \text{ oder } x = 5/c$

Betragsauflösungen stehen oft am Ende von Umformungen mit Hilfe von Grundfunktionen, die nur für nicht-negative oder positive Argumente z definiert (oder umkehrbar) sind – wie z. B. $f(z) = \sqrt{z}$, wobei z wiederum aus anderen Ausdrücken zusammengesetzt sein kann.

siehe Grundlagen Nrn. 6-9 und 11,13

17 Auflösen nach z Argument z einer zusammengesetzten Funktion

f umkehrbare Funktion, $z \in D(f)$, $b \in W(f)$:

$$f(z) = b \Leftrightarrow z = f^{-1}(b)$$

z.B., wenn f streng monoton fallende/wachsende Funktion

Liegen z und b im richtigen, anwendbaren Bereich für diese Umformungen?

18 Anwendungen auf Potenzfunktionen

Potenzfunktion z^{2n-1} mit $n \in \mathbb{N}$ (ungerader Exponent)

Für $b \in \mathbb{R}$: $z^{2n-1} = b \Leftrightarrow z = b^{1/(2n-1)}$

insbesondere: $z^3 = b \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{b}$ bzw. $\sqrt[3]{z^3} = z$

Wurzelfunktion $z^{1/(2n-1)}$ mit $n \in \mathbb{N}$ (ungerade Wurzelzahl)

Für $b \in \mathbb{R}$: $z^{1/(2n-1)} = b \Leftrightarrow z = b^{2n-1}$

insbesondere: $\sqrt[3]{z} = b \Leftrightarrow z = b^3$ bzw. $(\sqrt[3]{z})^3 = z$

Potenzfunktion z^r mit $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}_0$ und $1/r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$

Für $b > 0$: $z^r = b \Leftrightarrow z = b^{1/r}$

Bsp. a) $|x|^{3/2} = 10 \Leftrightarrow |x| = 10^{2/3} \Leftrightarrow (x = 10^{2/3} \text{ oder } x = -10^{2/3})$

b) Für $x \neq 0$: $|x|^{-2/3} = 10^{2/3} \Leftrightarrow |x| = 10^{-1} \Leftrightarrow (x = -10^{-1} \text{ oder } x = 10^{-1})$

19 Anwendungen auf andere Grundfunktionen als Potenzfunktionen

Exponentialfunktion e^z

Für $b > 0$: $e^z = b \Leftrightarrow z = \ln b$

natürlicher Logarithmus $\ln z$

Für $b \in \mathbb{R}$: $\ln z = b \Leftrightarrow z = e^b$

Auflösen nach einem Exponenten

Für $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$: $b^z = c \Leftrightarrow z \ln b = \ln c \Leftrightarrow z = \frac{\ln c}{\ln b}$

- Bsp. a) $e^{x-2} = b \Leftrightarrow x - 2 = \ln b \Leftrightarrow x = 2 + \ln b$,
falls $b > 0$; für $b \leq 0$ nicht lösbar, weil e^z immer positiv
- b) Für $x \neq 3$: $\ln(|x - 3|) = b \Leftrightarrow |x - 3| = e^b \Leftrightarrow (x = 3 - e^b \text{ oder } x = 3 + e^b)$
- c) $1.05^x = 2 \Leftrightarrow x \ln 1.05 = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 1.05} \approx 13.8$

20 Einige spezielle Typen von Gleichungen

Potenzfunktion z^{2n} mit $n \in \mathbb{N}$ (gerader Exponent)

Für $b > 0$: $z^{2n} = b \Leftrightarrow |z| = b^{1/(2n)}$

beachte: $z^{2n} = |z|^{2n}$

insbesondere: $z^2 = b \Leftrightarrow |z| = \sqrt{b}$ für $b > 0$ bzw. $\sqrt{z^2} = |z|$

Nullstellenbestimmung quadratischer Funktionen

$ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ und $d := b^2 - 4ac$ hat

falls $d < 0$: keine Lösung $x \in \mathbb{R}$

falls $d = 0$: die eine Lösung $x = -\frac{b}{2a}$

falls $d > 0$: die beiden Lösungen $x_1 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$

Bei Gleichungen $z^r = b$ mit geradem Exponenten r gilt

$$z = b^{1/r} \Rightarrow z^r = b, \text{ aber } z^r = b \not\Leftrightarrow z = b^{1/r}$$

- Bsp. a) $(x-3)^4 = 16 \Leftrightarrow |x-3| = 16^{1/4} = 2 \Leftrightarrow -2 = x-3$ oder $x-3 = 2$
 $\Leftrightarrow 1 = x$ oder $x = 5$
- b) $(x-3)^3 = -8 \Leftrightarrow x-3 = (-8)^{1/3} = -2 \Leftrightarrow x = 1$
- c) $1.05^z = 3 \Leftrightarrow z = \frac{\ln 3}{\ln 1.05}$
- d) $2^{-x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow -x = \frac{\ln(3/4)}{\ln 2} = \frac{\ln 3 - 2 \ln 2}{\ln 2} \Leftrightarrow x = 2 - \frac{\ln 3}{\ln 2}$
- e) $e^{3x^2+2x-1} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = \ln 1 = 0$ mit $d := 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$
 hat die zwei Lösungen $x_1 = \frac{-2-4}{6} = -1$ und $x_2 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$

Nullstellenbestimmung bei Produkten von Funktionen

$$f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ oder } g(x) = 0$$

- Bsp. a) $(x+3) \cdot (x-5) \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ oder $x = 5$ oder $x = 1$
- b) $x^3 + 4 \cdot x^2 - 5 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 + 4 \cdot x - 5) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -5$ oder $x = 1$
- c) $\ln(x+1) \cdot (x-3) \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 3$

21 Gleichungssystem

Mehrere Gleichungen mit mehreren Variablen. Gesucht: Alle Lösungen (Variablenwerte), die simultan alle Gleichungen erfüllen.

Einfache Typen

- 1) Mehrere **nichtlineare Gleichungen** mit mehreren Variablen

Benötigt insbesondere bei mehrdimensionaler Extremwertbestimmung. Kann sehr schwierig werden, es gibt keine *allgemeinen* systematischen Lösungswege (Algorithmen oder Formeln). Mit obigen Hilfsmitteln meist machbar: Zwei Gleichungen mit zwei Variablen.

- 2) m **lineare Gleichungen** mit n Variablen ($m, n \in \mathbb{N}$)

▷ *Thema 3.3*

Jede Gleichung besitzt eine Lösungsmenge. Das simultane Lösen von Gleichungen bedeutet dann, den Durchschnitt der Lösungsmengen zu den einzelnen Gleichungen zu bilden.

Bsp. für Typ 1)

Die Gewinne eines Produktes werde beschrieben durch die Funktion

$$f(x, y) = x^4 - 8 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y^2 + 16 \quad (\text{Kapitaleinsatz } x > 0, \text{ Arbeitseinsatz } y > 0).$$

Gesucht ist die Kombination aus Kapital- und Arbeitseinsatz, die zu maximalem Gewinn führt.

Der Standardansatz der mathematischen Theorie zur Optimierung von Funktionen mit mehreren Veränderlichen (\triangleright *Thema 8.1*) führt die Fragestellung darauf zurück, das Gleichungssystem $\langle x^3 - 2 \cdot y = 0$ und $-2 \cdot x + y = 0$ \rangle zu lösen. Die zweite Gleichung nach y aufgelöst und in die erste Gleichung eingesetzt liefert das äquivalente Gleichungssystem

$$\langle x \cdot (x^2 - 4) = 0 \text{ und } y = 2 \cdot x \rangle. \quad (\text{Äquivalenz prüfen})$$

Die erste Gleichung hat die Lösungen $x = 0$ oder $x = -2$ oder $x = 2$. Diese Lösungen in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt die Lösungsmenge des ursprünglichen Gleichungssystems $\mathbb{L} = \{(-2, -4), (0, 0), (2, 4)\}$ (angegeben sind (x, y) -Paare). Da nach Voraussetzung *Kapitaleinsatz* $x > 0$ und *Arbeitseinsatz* $y > 0$, so ergibt sich als *zulässige* Lösungsmenge $\mathbb{L}_z = \{(2, 4)\}$.

Umformungen von linearen Ungleichungen

Lineares Ungleichungssystem mit zwei Variablen x, y (LUGS)
 n Ungleichungen der Form $a_i x + b_i y \leq c_i$ $i = 1, \dots, n$

Bsp. 4 (1) $2x + 2y \leq 15$ (2) $-5x + 6y \geq 1$ (3) $y \leq 6$ (4) $x \geq 1$

Die Ungleichungen (2) bzw. (4) sind äquivalent zu ihrer allgemeinen Form $5x - 6y \leq -1$ bzw. $-x \leq -1$. Die Nennung einer Ungleichung mit „ \geq “, also ohne Umformung in die allgemeine Form, wird meist dann gewählt, wenn es sich im Sinne der ökonomischen Problemstellung um eine „Untergrenze“ handelt.

Lineare Ungleichungen ergeben sich z.B. aus Budgetrestriktionen, Kapazitätsbeschränkungen, Voraussetzung von Bereichsgrenzen für die betrachteten ökonomischen Variablen (häufig: Nichtnegativität, d.h. $x, y \geq 0$).

Bsp.

Eine Bankkundin möchte eine Erbschaft von 10 000 Euro in Anteile von deutschen und chinesischen Aktien anlegen. Mit den Variablen x und y werden die in die deutschen beziehungsweise chinesischen Aktien anzulegenden Geldbeträge (in Euro) bezeichnet. Es sind keine negativen Geldbeträge zugelassen. Außerdem darf nicht mehr als der Erbschaftsbetrag ausgegeben werden und die Kundin möchte keinen höheren Anlagebetrag für chinesische Aktien ausgeben als für deutsche. Die Gesamtheit der Anlagebedingungen lässt sich darstellen durch das folgende System von Ungleichungen (\triangleright Aufgabe T 3):

$$(1) \ x \geq 0 \quad (2) \ y \geq 0 \quad (3) \ x + y \leq 10000 \quad (4) \ x \geq y$$

Zur Beschreibung von Lösungsmengen linearer Ungleichungssysteme greifen wir auf die Regeln zur linearen Umformung von Ungleichungen zurück.

22a Lineare Umformung von Ungleichungen

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ($c \neq 0$)

$$\begin{array}{llll} a + d \leq b + d & \Leftrightarrow & a \leq b & \text{Ungleichung bleibt} \\ c \cdot a \leq c \cdot b & \Leftrightarrow & a \leq b, \text{ wenn } c > 0 & \text{bleibt} \\ c \cdot a \leq c \cdot b & \Leftrightarrow & a \geq b, \text{ wenn } c < 0 & \text{dreht} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} a + d < b + d & \Leftrightarrow & a < b & \text{Ungleichung bleibt} \\ c \cdot a < c \cdot b & \Leftrightarrow & a < b, \text{ wenn } c > 0 & \text{bleibt} \\ c \cdot a < c \cdot b & \Leftrightarrow & a > b, \text{ wenn } c < 0 & \text{dreht} \end{array}$$

Die Ungleichungen beiderseits des Äquivalenzzeichens können auch jeweils von rechts nach links gelesen werden!

VORSICHT Bei Multiplikation/Division beider Seiten einer Ungleichung ist ohne näheres Wissen um den Faktor $c \neq 0$ eine **Fallunterscheidung** ($c < 0$ oder $c > 0$) erforderlich!

Beispiel (Voraussetz. $c \neq 0$): $cx + b < d \Leftrightarrow cx < d - b \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{d-b}{c}, & \text{falls } c > 0 \\ x > \frac{d-b}{c}, & \text{falls } c < 0 \end{cases}$

Schreibweise für gleichartige Ungleichungen

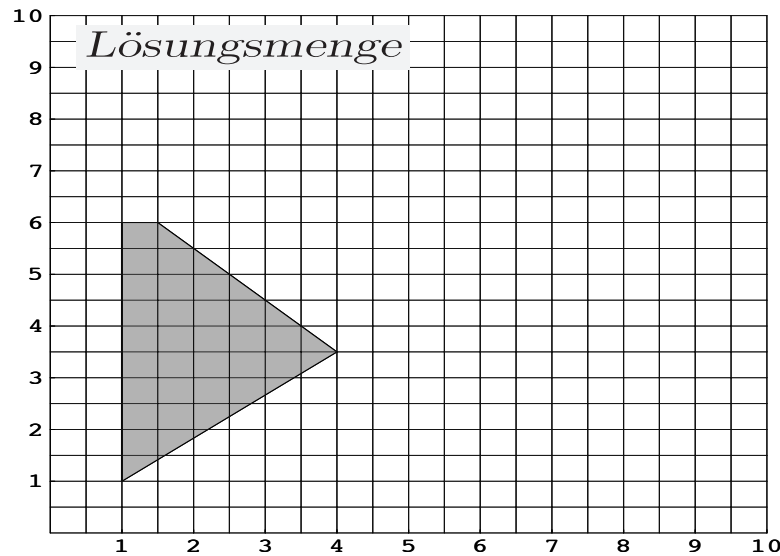
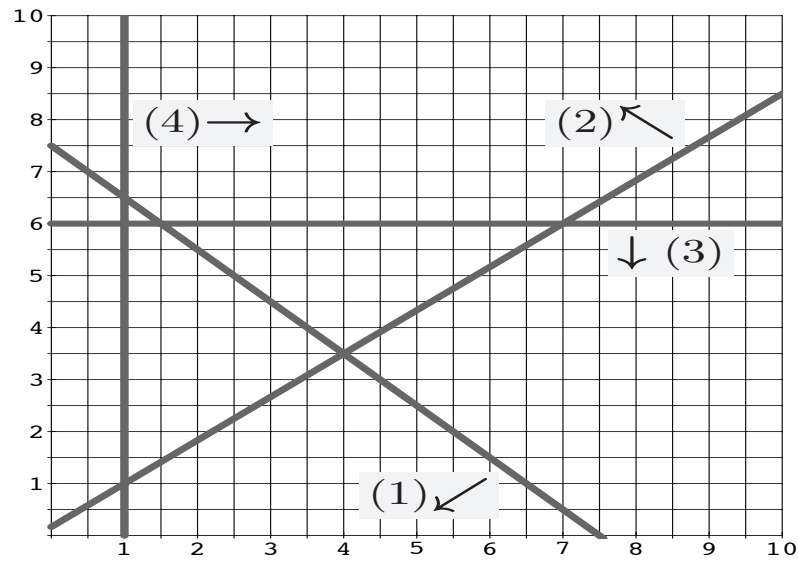
$a \leq b \leq c : \Leftrightarrow (a \leq b \text{ und } b \leq c)$ entsprechend mit $<, >, \leq$ statt \leq

22b Graphische Bestimmung der Lösungsmenge eines LUGS

1. Auflösen und skizzieren der Lösungsmenge jeder einzelnen Ungleichung in ein (x, y) -Koordinatensystem (im Vergleich zu der zugehörigen Beschränkungsgeraden bzw. zugehörigen Parallelen zur y -Achse)
 - Beschränkungen, bei denen y vorkommt, nach y auflösen. Einzeichnen der zugehörigen Beschränkungsgerade „ $y = \dots$ “ und Markierung der zulässigen Richtung:
 - „unterhalb“ bei „ $y \leq \dots$ “ bzw. „oberhalb“ bei „ $y \geq \dots$ “
 - Beschränkungen nur für x entsprechend nach x auflösen, die zugehörige Senkrechte zu „ $x = \dots$ “ einzeichnen und die zulässige Richtung markieren:
 - „links“ bei „ $x \leq \dots$ “ bzw. „rechts“ bei „ $x \geq \dots$ “
2. Lösungsmenge des LUGS = Menge aller Variablenpaare (x, y) , die alle Ungleichungen erfüllen, graphisch die Schnittmenge der Lösungsmengen (zulässigen Mengen) der einzelnen Ungleichungen.

Bsp. 4 (Fortsetz.) Das aufgelöste LUGS:

(1) $y \leq \frac{15}{2} - x$ (2) $y \geq \frac{1}{6} + \frac{5}{6}x$ (3) $y \leq 6$ (4) $x \geq 1$



Diese Lösungsmenge ist Ausdruck eines sich „wohlverhaltenden“ LUGS, in Form eines Polyeders. Solche Polyeder sind oft Zulässigkeitsbereiche für ökonomische Optimierungsprobleme.

Elementare Matrizenrechnung

$m \times n$ -Matrix von Zahlen

rechteckige Tabelle

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,1} & \cdots & \mathbf{a}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m,1} & \cdots & \mathbf{a}_{m,n} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ Dimension der Matrix

Sprechweise: „m Kreuz n“

wobei \mathbf{m} = Anzahl Zeilen, \mathbf{n} = Anzahl Spalten

$\mathbf{a}_{i,j}$ Element der Matrix

1. Index Zeilennr., 2. Index Spaltennr.

Eine 1×1 -Matrix wird als Zahl – ohne die Matrixklammern – geschrieben

Eine $m \times n$ -Matrix $\mathbf{A}_{m \times n}$ hat $m \cdot n$ Elemente $\mathbf{a}_{i,j}$

23 Gleichheit $\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{B}_{m \times n} \Leftrightarrow$ elementweise Gleichheit

Gleichheit $\mathbf{A} = \mathbf{B}$:

1. \mathbf{A} und \mathbf{B} müssen gleiche Dimension haben

2. $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{b}_{ij}$ für alle Elemente im paarweisen Vergleich

Bsp. $(1 \ 2)_{1 \times 2}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$ sind nicht vergleichbar (als Matrizen)

$(1 \ 2)_{1 \times 2} \neq (2 \ 2)_{1 \times 2}$ sind vergleichbar, aber verschieden

$(1 \ 2)_{1 \times 2} = (3^0 \ \frac{4}{2})_{1 \times 2}$ sind gleich

Transponierte $(\mathbf{A}^T)_{n \times m} = (\mathbf{A}_{m \times n})^T$ einer Matrix $\mathbf{A}_{m \times n}$

Die Zeilen (bzw. Spalten) einer Matrix werden in unveränderter Reihenfolge als Spalten (bzw. Zeilen) aufgeschrieben.

Zweimaliges Transponieren führt zum Ausgangszustand zurück

$$\text{Eigenschaft: } (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$\text{Bsp. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}; (a_1 \ a_2)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Transponieren ist insbesondere für reine Darstellungszwecke sehr nützlich.

24 Einige spezielle Matrizen $A_{m \times n}$

Äußere Formen

$m = n$	quadratische Matrix	<i>d.h. Zeilenanzahl = Spaltenanzahl</i>
$m = 1$	n-Zeilenvektor	<i>$n =$ Elementanzahl der einen Zeile</i>
$n = 1$	m-Spaltenvektor	<i>$m =$ Elementanzahl der einen Spalte</i>

Innere Formen

$\mathbf{0}_{m \times n}$	Nullmatrix	<i>Zeilen und n Spalten nur Nullen</i>
$\mathbf{0}_n, (\mathbf{0}_n)^T$	Nullspalte, Nullzeile	<i>Spalte bzw. Zeile mit n Nullen</i>
$\mathbf{1}_{m \times n}$	Einsenmatrix	<i>Zeilen und n Spalten nur Einsen</i>
$\mathbf{1}_n, (\mathbf{1}_n)^T$	Einsenspalte, Einsenzeile	<i>Spalte bzw. Zeile mit n Einsen</i>

Wir schreiben *Einsenmatrix* statt *Einsmatrix* um jede Verwechslung mit der (folgenden) *Einheitsmatrix* auszuschließen

Mischformen

$$\mathbf{E}_{n \times n} \text{ Einheitsmatrix } \mathbf{E}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e_n^j j -te Spalte von $\mathbf{E}_{n \times n} = j$ -ter Einheitsspaltenvektor

(das j -te Element von e_n^j ist *Eins*, alle anderen sind *Null*)

$(e_n^i)^T$ i -te Zeile von $\mathbf{E}_{n \times n} = i$ -ter Einheitszeilenvektor

(das i -te Element von $(e_n^i)^T$ ist *Eins*, alle anderen sind *Null*)

Bei einer quadratischen Matrix $A_{n \times n}$ heißen die Matrixelemente mit gleicher Zeilen- und Spaltennummer **Diagonalelemente**: $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$

Eine quadratische Matrix $A_{n \times n}$ heißt

Diagonalmatrix wenn *außerhalb* ihrer Diagonale

nur Nullstellen stehen (Bsp. $E_{n \times n}$)

a	0	0
0	b	0
0	0	c

obere Dreiecksmatrix wenn *unterhalb* ihrer Diagonale

nur Nullstellen stehen

a	b	c
0	d	e
0	0	f

untere Dreiecksmatrix wenn *oberhalb* ihrer Diagonale

nur Nullstellen stehen

a	0	0
b	c	0
d	e	f

25 Rechenoperationen mit Matrizen

Addition „Matrix $_{m \times n} \pm$ Matrix $_{m \times n}$ “

Addition von Matrizen gleicher Dimension = Elementweise Addition

$$\text{Regeln: } A + B = B + A \quad \text{und} \quad (A + B)^T = A^T + B^T$$

Multiplikation „Zahl \cdot Matrix“

= Multiplikation jedes Matrixelements mit dieser Zahl

$$\text{Regel: } \alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A \quad \text{wobei } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Multiplikation „k-Zeilenvektor \cdot k-Spaltenvektor“

als Baustein der Matrixmultiplikation:

„Skalarprodukt“

$$(z_1, \dots, z_k) \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} := z_1 \cdot s_1 + \dots + z_k \cdot s_k$$

Multiplikation „Matrix $_{m \times k}$ · Matrix $_{k \times n}$ “

= Multiplikation mehrerer k -Zeilenvekt. mit mehreren k -Spaltenvekt.

$C_{m \times n} := A_{m \times k} \cdot B_{k \times n}$ wird elementweise definiert:

Das Element $c_{i,j}$ von $C_{m \times n}$ ist das Ergebnis der Multiplikation

(Zeile Nr. i von A) · (Spalte Nr. j von B) ← je k Elemente

$$c_{i,j} := a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \dots + a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

$$A_{m \times k} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,j} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\ b_{k,1} & \dots & b_{k,j} & \dots & b_{k,n} \end{pmatrix} = B_{k \times n}$$

$$\begin{pmatrix} c_{i,j} \end{pmatrix} =: (A \cdot B)_{m \times n}$$

Regeln: $C(A + B) = CA + CB$ und $(A + B)C = AC + BC$

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ und $(AB)^T = B^T A^T$

VORSICHT $A \cdot B = B \cdot A$ ist im Allgemeinen falsch

$A \cdot B$ ist nur definiert, wenn Spaltenzahl von $A =$ Zeilenanzahl von B

Bsp. 1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (1 \ 0)$ nicht definiert

Bsp. 2 Ausklammern eines zu jedem Element einer Matrix *gemeinsamen Faktors*:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Bsp. 3 $(1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$; $(1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$; $(0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Bsp. 4 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{nicht definiert}$$

Bsp. 5 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Bsp. 6 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

In Bsp. 5 sind $(A \cdot B)_{2 \times 2}$ und $(B \cdot A)_{3 \times 3}$ nicht einmal vergleichbar, in Bsp. 6 sind $(A \cdot B)_{2 \times 2}$ und $(B \cdot A)_{2 \times 2}$ vergleichbar, aber verschieden.

Zwei allgemeinere Beispiele (Eigenschaften)

Bsp. 7 Für beliebige Matrizen $A_{m \times n}$ (insbesondere Vektoren) ist

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{0}_{n \times k} & = \mathbf{0}_{m \times k} & \mathbf{A}_{m \times n} + \mathbf{0}_{m \times n} & = \mathbf{A}_{m \times n} \\ \mathbf{0}_{k \times m} \cdot \mathbf{A}_{m \times n} & = \mathbf{0}_{k \times n} & \mathbf{0}_{m \times n} + \mathbf{A}_{m \times n} & = \mathbf{A}_{m \times n} \end{array}$$

Die Nullmatrix spielt bei der „Matrixaddition“ die gleiche „neutrale“ Rolle wie die Zahl Null bei der Addition von Zahlen.

Anders als bei Zahlen kann aber bei der „Matrixmultiplikation“ aus der Gleichung $A \cdot B = \mathbf{0}$ im Allgemeinen nicht gefolgert werden, dass \mathbf{A} oder \mathbf{B} die Nullmatrix ist (vgl. Bspe. 3 und 6)

Bsp. 8 Für beliebige Matrizen $A_{m \times n}$ (insbesondere Vektoren) ist

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{E}_{n \times n} = \mathbf{A}_{m \times n} & \mathbf{E}_{n \times n} \cdot \mathbf{a}_{n \times 1} = \mathbf{a}_{n \times 1} \\ \mathbf{E}_{m \times m} \cdot \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{A}_{m \times n} & \mathbf{a}_{1 \times n} \cdot \mathbf{E}_{n \times n} = \mathbf{a}_{1 \times n} \end{array}$$

Die Einheitsmatrix spielt bei der Matrixmultiplikation die gleiche „neutrale“ Rolle wie die Zahl Eins bei der Multiplikation von Zahlen.

Anwendungsbeispiel

Bei einem *zweistufigen Produktionsprozess* sind die beiden einstufigen Bedarfstabellen (*Elemente*: Bedarf in Anzahl Einheiten Zeilenobjekt bei der Produktion einer Einheit Spaltenobjekt) M_{RZ} und M_{ZE} wie folgt gegeben:

Zwischenprodukte Z		Endprodukte E							
		Z_1	Z_2	Z_3		E_1	E_2	E_3	
Rohstoffe R_1	R_1	1	2	2	Zwischen-	Z_1	1	0	1
R	R_2	0	1	1	produkte	Z_2	0	2	1
					Z	Z_3	2	3	1

$$\text{Rohstoffpreis } r = (r_1, r_2) = (4, 5)$$

$$\text{Verkaufspreis } p = (p_1, p_2, p_3) = (10, 100, 10)$$

Preise werden als Zeile angegeben. Zwischenprodukte werden in diesem einfachen Modell weder gekauft noch verkauft. Ebenso erfordern feinere Wertbetrachtungen (*Produktionskosten/Gewinn*) ein erweitertes ökonomisches Modell. Wir betrachten hier, sehr vereinfacht, nur „Einkauf“ und „Verkauf“.

$\mathbf{M}_{RE} = \mathbf{M}_{RZ} \cdot \mathbf{M}_{ZE}$ Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung

$$\begin{aligned} M_{RE} &= M_{RZ} \cdot M_{ZE} && \text{Endprodukte } E \\ & && \text{color: red } E_1 \quad E_2 \quad E_3 \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \text{ d.h. Rohstoffe } && \text{color: red } R_1 \quad 5 \quad 10 \quad 5 \\ & && R \quad \text{color: red } R_2 \quad 2 \quad 5 \quad 2 \end{aligned}$$

$Z = M_{ZE} \cdot E$ Zwischenproduktbedarf Z bei geg. Endproduktion E

Für $E = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist der Z -Mengenvektor: $Z = M_{ZE} \cdot E = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 45 \end{pmatrix}$

$R = M_{RE} \cdot E = M_{RZ} \cdot Z$ Rohstoffbedarf R bei geg. Endproduktion E

Für $E = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist der R -Mengenvektor: $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix}$

Zum Vergleich einstufig rückwärts gerechnet: $R = M_{RZ} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix}$

$r \cdot R$ Rohstoffkosten

$$\text{Rohstoffkosten} = r \cdot R = 950$$

$p \cdot E$ Verkaufserlös

$$\text{Verkaufserlös} = p \cdot E = 1100$$

Ist nicht die Endproduktion E vorgegeben, sondern ein Rohstoffvorrat R bzw. ein Zwischenproduktvorrat Z , so muss die Matrixgleichung $R = M_{RE} \cdot E$ bzw. $Z = M_{ZE} \cdot E$ nach E „aufgelöst“ werden

▷ Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme I (Matrixgleichungen)

Eine lineare Gleichung mit einer Variablen x hat bei Zahlen a, b, x die Form $ax = b$. Falls hierbei der Kehrwert von a gebildet werden darf ($a \neq 0$), kann eindeutig aufgelöst werden zu $x = a^{-1}b$.

Für **Matrixgleichungen (Gleichungen zwischen Matrizen)** mit einer unbekanntem Matrix X stellt sich die entsprechende Frage nach der Auflösbarkeit:

Gegeben: $A \cdot X = B$ bzw. $X \cdot A = B$ Gesucht: $X = ?$

Matrixgleichungen finden insbesondere Anwendung bei Untersuchungen mehrstufiger Produktionsprozesse, Verflechtungsanalysen (Input/Output-Analyse) im Mikro- und Makrobereich, in der Linearen Optimierung sowie bei Übergangsmoellen in der Marktforschung (stochastische Matrizen) und bei Zeitreihenanalysen

▷ *Ökonomische Beispiele*

Die für Umformungen von Matrixgleichungen benötigten Begriffe werden unten zusammengestellt. Danach wird besprochen:

ein rechnerisches Lösungsverfahren, das bei jeder Matrixgleichung alle Lösungsmöglichkeiten für X liefert: „Gauß-Jordan-Algorithmus“ ▷ *Thema 3.3*

26 Inverse (Kehrmatrix) $A_{n \times n}^{-1}$ einer quadratischen Matrix $A_{n \times n}$

Die inverse Matrix $A_{n \times n}^{-1}$ zu $A_{n \times n}$ kann existieren. Falls es sie gibt, so ist sie eindeutig bestimmt durch jede der beiden Matrixgleichungen

$$\text{Definierende Eigenschaft } A_{n \times n}^{-1} \cdot A_{n \times n} = E_{n \times n} = A_{n \times n} \cdot A_{n \times n}^{-1}$$

Bezeichnung Eine Matrix heißt **invertierbar** (auch: *nicht-singulär*), wenn sie quadratisch ($n \times n$ -Matrix) ist und ihre Inverse existiert

Methodische Berechnung von Inversen ▷ *Thema 3.3*

Test für $n \times n$ -Matrizen A und B

- Ist $A \cdot B = E_{n \times n}$, so ist auch $B \cdot A = E_{n \times n}$ und $A^{-1} = B$ und $B^{-1} = A$
- Ist $A \cdot B \neq E_{n \times n}$, so ist (falls A oder B überhaupt invertierbar sind) weder $A^{-1} = B$ noch $B^{-1} = A$

Bsp. 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \qquad\qquad\qquad B \qquad\qquad\qquad E_{3 \times 3}$

A und B sind zueinander inverse Matrizen: $A^{-1} = B$ und $B^{-1} = A$

Bsp. 2 **Leicht erkennbare Muster nicht-invertierbarer Matrizen**

- *Besitzt eine Matrix A ungleiche Zeilen- und Spaltenzahl*, so ist sie nicht invertierbar.
- *Enthält eine Matrix A eine Nullzeile (bzw. Nullspalte)*, so ist im Produkt $A \cdot X$ (bzw. $X \cdot A$) die entsprechende Zeile (bzw. Spalte) ebenfalls eine Nullzeile (bzw. Nullspalte) – das Produkt kann also nie, für keine Matrix X gleich der Einheitsmatrix sein
- *Ist in einer Matrix A eine Zeile (bzw. Spalte) ein Vielfaches einer anderen Zeile (bzw. Spalte)*, so wiederholt sich diese Eigenschaft im Produkt $A \cdot X$ (bzw. $X \cdot A$) mit den entsprechenden Zeilen (bzw. Spalten) – das Produkt kann also nie, für keine Matrix X , gleich der Einheitsmatrix sein, die eine solche Eigenschaft eben nicht aufweist

Bsp. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -0 \end{pmatrix}$ sind nicht invertierbar

Bsp. 3 **Leicht erkennbare Muster invertierbarer Matrizen**

- *Eine Diagonalmatrix A , bei der kein Diagonalelement gleich Null ist*, hat als Inverse die Diagonalmatrix der Kehrwerte der Diagonalelemente von A

$$\text{Bsp. } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- *Eine Einheitsmatrix, deren Zeilen (bzw. Spalten) umgeordnet sind*, hat als Inverse ihre transponierte Matrix

27 Rechenregeln für Inverse von quadratischen Matrizen

- (R1) $A^{-1} \cdot A = E = A \cdot A^{-1}$ definierende Eigenschaften
- (R2) $(A^{-1})^{-1} = A$ falls A invertierbar
- (R3) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ falls die Zahl $\alpha \neq 0$ und A invertierbar
- (R4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ falls A invertierbar
- (R5) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ falls A und B invertierbar
- (R6) $P^{-1} = P^T$ falls P aus den umsortierten Zeilen
(bzw. aus den umsortierten Spalten)
der Einheitsmatrix besteht

Regel (R4) bedeutet: Aus der Invertierbarkeit von A folgt die Invertierbarkeit von A^T und die Gleichheit $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Regel (R5) bedeutet: Aus der Invertierbarkeit von A und B folgt die Invertierbarkeit von $A \cdot B$ und die Gleichheit $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

VORSICHT Die Umkehrung von (R5) ist nur dann richtig, wenn A und B beide quadratisch sind, d.h. dann folgt aus der Invertierbarkeit des Produktes $A \cdot B$ auch die Invertierbarkeit der einzelnen Matrix-Faktoren A und B . Bei vielen ökonomischen Anwendungen sind die beiden Faktoren aber typischerweise nicht quadratisch: Z.B. liegt in der Zeitreihenanalyse meist eine Beobachtungsmatrix $A_{m \times n}$ mit $m > n$ vor, wobei m = Anzahl Beobachtungspereioden, n = Anzahl erklärender Variabler. Das für weitere Umformungen wichtige Produkt $(A_{m \times n}^T \cdot A_{m \times n})$, eine $n \times n$ -Matrix, ist dabei – per Modellvoraussetzung für die Variablen – invertierbar.

28 Umformungen von Matrixgleichungen*Dimensionen beachten*

Addition $A_{m \times n} = B_{m \times n} \Leftrightarrow A_{m \times n} + C_{m \times n} = B_{m \times n} + C_{m \times n}$

Rechts ausklammern $X_{m \times n} - A_{m \times m} \cdot X_{m \times n} = (E - A)_{m \times m} \cdot X_{m \times n}$

Links ausklammern $X_{m \times n} - X_{m \times n} \cdot A_{n \times n} = X_{m \times n} \cdot (E - A)_{n \times n}$

Mit Hilfe inverser Matrizen, deren Existenz z.B. aufgrund theoretischer Überlegungen (ökonomische Modellannahmen) vorausgesetzt werden kann, sind abstrakte Umformungen von Matrixgleichungen zu allgemeinen Lösungen möglich:

Auflösen von links, falls $A_{m \times m}$ invertierbar

$$A_{m \times m} \cdot X_{m \times n} = B_{m \times n} \Leftrightarrow X_{m \times n} = A_{m \times m}^{-1} \cdot B_{m \times n}$$

Auflösen von rechts, falls $A_{n \times n}$ invertierbar

$$X_{m \times n} \cdot A_{n \times n} = B_{m \times n} \Leftrightarrow X_{m \times n} = B_{m \times n} \cdot A_{n \times n}^{-1}$$

Das ganze noch einmal, in einprägsamer Kurzform (auf die Dimensionen achten wir bei der konkreten Ausführung):

Addition $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$

Rechts ausklammern $X - A \cdot X = (E - A) \cdot X$

Links ausklammern $X - X \cdot A = X \cdot (E - A)$

Auflösen von links, falls A invertierbar $A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Auflösen von rechts, falls A invertierbar $X \cdot A = B \Leftrightarrow X = B \cdot A^{-1}$

Bsp. 4 Gegeben ist die folgende Matrixgleichung, wobei X unbekannt ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

Damit die Gleichung definiert ist, muss X die Dimension 2×3 haben.

Auflösen von links und rechts liefert

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bsp. 5

Die beiden $n \times n$ -Matrizen A, C in der folgenden Matrixgleichung seien invertierbar, X ist unbekannt: $A \cdot X \cdot C = B$

Auflösen nach X liefert die äquivalente Gleichung: $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$. Falls auch noch B invertierbar ist, ist auch das Produkt X invertierbar und

$$X^{-1} = (A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1})^{-1} = C \cdot B^{-1} \cdot A$$

▷ Nr. 30, (R5)

Bsp. 6 Die Inverse der Matrix

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Mit dieser Information kann die Lösung X der beiden Matrixgleichungstypen $A \cdot X = B$ bzw. $X \cdot A = B$ direkt angegeben werden, z.B.:

$$6 a) \quad A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ hat die Lösung } X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \\ 7 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$6 b) \quad X \cdot A = (1 \ 1 \ 1) \text{ hat die Lösung } X = (1 \ 1 \ 1) \cdot A^{-1} = (5 \ 0 \ -5)$$

29 Lineares Gleichungssystem LGS $(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$ m Gleichungen, m Zielwerte b_i , n Variablen x_j , $m \cdot n$ Koeffizienten $a_{i,j}$

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{1,n} \cdot x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{m,n} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

In Matrixschreibweise: $A \cdot x = b$ Koeffizientenmatrix (m Zeilen und n Spalten) $A_{m \times n}$ Variablenvektor (Spalte mit n Elementen x_1, \dots, x_n) $x_{n \times 1}$ Zielvektor (Spalte mit m Elementen b_1, \dots, b_m) $b_{m \times 1}$ *Bsp. 7*

Im Anwendungsbeispiel von Thema 3.1 ist $M_{RE} \cdot E = R$ ein LGS, bei dem M_{RE} die Koeffizientenmatrix, ein verfügbarer Rohstoffvektor R den Zielvektor und E den Variablenvektor darstellen, z.B.:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix} \text{ für gegebenes } \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix}$$

In Gleichungsform (2 Gleichungen, 2 Zielwerte, 3 Variablen):

$$\begin{array}{ccccccc} 5 \cdot E_1 & + & 10 \cdot E_2 & + & 5 \cdot E_3 & = & 150 \\ 2 \cdot E_1 & + & 5 \cdot E_2 & + & 2 \cdot E_3 & = & 70 \end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme II, Gauß-Jordan Algorithmus

Ein $m \times n$ -Lineares Gleichungssystem (LGS) ist in Gleichungsform

$$\begin{aligned} a_{1,1} \cdot x_1 + \dots + a_{1,n} \cdot x_n &= b_1 \\ \vdots & \\ a_{m,1} \cdot x_1 + \dots + a_{m,n} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

oder gleichwertig in Matrixschreibweise $A_{m \times n} \cdot x_{n \times 1} = b_{m \times 1}$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

oder gleichwertig in Tabellenform gegeben:

Variablen (Spaltenfaktoren)			Zielvektor		
x_1	\dots	x_n	(=)	b	
$a_{1,1}$	\dots	$a_{1,n}$		b_1	erste Gleichung
\vdots		\vdots		\vdots	
$a_{m,1}$	\dots	$a_{m,n}$		b_m	m -te Gleichung
Koeffizientenmatrix A			Zielvektor b		
Erweiterte Koeffizientenmatrix $(A b)$					

Bsp. 1 (Produktionsprozess, gesuchte Variablen sind die Endproduktmengen)

$$(1) \quad \begin{aligned} 5 \cdot E_1 + 10 \cdot E_2 + 5 \cdot E_3 &= 150 \\ 2 \cdot E_1 + 5 \cdot E_2 + 2 \cdot E_3 &= 70 \end{aligned}$$

$$(2) \quad M_{RE} \cdot E = R \text{ mit } \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{array}{ccc|cc} E_1 & E_2 & E_3 & (=) & b \\ \hline 5 & 10 & 5 & 150 & 1. \text{ Gleichung} \\ 2 & 5 & 2 & 70 & 2. \text{ Gleichung} \end{array}$$

Zur folgenden Theorie gibt es ausführliche Beispiele, die „parallel“ besprochen werden, der besseren Übersichtlichkeit wegen aber (nach den Schemata) gesammelt aufgeführt sind.

30 Jeder Variablenvektor x , der $A \cdot x = b$ erfüllt, heißt Lösung des LGS

Ein LGS hat

- | | | |
|----------|-----------------------------|---------------------------------|
| entweder | • keine Lösung | <i>unlösbares LGS</i> |
| oder | • genau eine Lösung | <i>eindeutig lösbares LGS</i> |
| oder | • unendliche viele Lösungen | <i>LGS mit freien Variablen</i> |

Das unten folgende Lösungsverfahren basiert auf der systematischen Anwendung von *elementaren Umformungen* eines LGS, die *auf die erweiterte Koeffizientenmatrix angewandt* werden.

31 Elementare Zeilenumformungen

Die Lösungsmenge eines LGS bleibt unverändert bei

- Vertauschung der Zeilen (= Reihenfolgenänderung der Gleichungen)
- Multiplikation einer Zeile/Gleichung mit einem Faktor ungleich Null
- Addition einer Zeile/Gleichung zu einer anderen
- Vertauschung der Spalten bei gleichzeitigem Mittauschen der Variablen, d.h. der (gesuchten) Spaltenfaktoren x_1, \dots, x_n

Jedes LGS $A \cdot x = b$ kann mittels dieser vier elementaren Umformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ in ein „äquivalentes“ LGS $A^* \cdot x = b^*$ mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A^*|b^*)$ umgeformt werden,

- das die **gleiche Lösungsmenge wie $A \cdot x = b$ liefert**,
- aus dem diese **Lösungsmenge direkt ablesbar** ist.

*Der Stern * steht zur Symbolisierung der Umformung zu etwas (hinsichtlich der gesuchte Lösungsmenge) Gleichwertigem.*

Das systematische Vorgehen dieser Umformung heißt *Gauß-Jordan-Algorithmus* und das Ergebnis $A^* \cdot x = b^*$ bzw. $(A^*|b^*)$ heißt „kanonische Form“ des LGS $A \cdot x = b$. Wir nennen $(A^*|b^*)$ einfach *Schlusstabelle* (*Schlusstableau*).

32 Gauß-(Jordan)-Algorithmus zur Lösung eines LGS $A \cdot x = b$

Schlusstableau

Ziel $(A^* | b^*)$ der Umformungen

Koeffiz'matrix A^* und (ggf. vertauschte) Variable							Zielvekt. b^*	
x_1^*	...	x_r^*	x_{r+1}^*	...	x_n^*	(=)	b^*	
$E_{r \times r}$	{	1		0	$a_{1,r+1}^*$...	$a_{1,n}^*$	b_1^*
			...		\vdots			\vdots
		0		1	$a_{r,r+1}^*$...	$a_{r,n}^*$	b_r^*
		0	...	0	0	...	0	b_{r+1}^*
		\vdots		\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
0	...	0	0	...	0		b_m^*	

Ziel in Kurzform: Links oben steht eine $(r \times r)$ -Einheitsmatrix, unterhalb allenfalls Nullzeilen. Zur Bedeutung von r sieht unten \rightarrow Lösungsmenge: Schritt 6

1 Ausgangspunkt

LGS in Tabellenform

x_1	...	x_n	(=)	b
$a_{1,1}$...	$a_{1,n}$		b_1
\vdots		\vdots		\vdots
$a_{m,1}$...	$a_{m,n}$		b_m

$\leftarrow (A|b)$

- \triangleright Falls $(A|b) = 0$ (die Nullmatrix), so ist *jeder* Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ein Lösungsvektor \rightarrow fertig
- \triangleright Falls $(A|b) \neq 0$
 - \triangleright Falls $m > 1$ und $A \neq 0$ \rightarrow weiter mit Schritt 2
 - \triangleright Falls $m > 1$ und $A = 0$, oder falls $m = 1$ (d.h. nur eine Gleichung), so liegt schon ein Schlusstableau vor \rightarrow weiter mit Schritt 6

2 Erste Tauschaktion

[Bei Spaltentausch: Variable mittauschen!]

Tausche – falls erforderlich – Zeilen von $(A|b)$ und Spalten von A , bis links oben eine Zahl $\neq 0$ steht. Zeile 1 und Spalte 1 sind nun für weitere Tauschaktionen auf Dauer

„gesperrt“ . Zeile 1 (der erweiterten Koeffizientenmatrix) wird **aktuelle Basiszeile**, Spalte 1 wird **aktuelle Basisspalte** und das Element links oben **aktuelles Basiselement**

→ weiter mit Schritt 4

3 Weitere Tauschaktion

[Bei Spaltentausch: Variable mittauschen!]

- ▷ Tausche – falls *möglich* und erforderlich – nicht gesperrte Zeilen und Spalten der Koeffizientenmatrix, bis eine Zahl $\neq 0$ links oben im erlaubten Bereich (d.h. ohne alle gesperrten Zeilen und Spalten) steht. Diese Zahl wird **aktuelles Basiselement**, die zugehörige Spalte/Zeile (der erweiterten Koeffizientenmatrix) wird **aktuelle Basisspalte/aktuelle Basiszeile**. Letztere sind nun für weitere Tauschaktionen auf Dauer „gesperrt“

→ weiter mit Schritt 4

- ▷ Ist ein derartiger Tausch *nicht möglich*, so liegt bereits ein Schlusstableau vor.

4 Eliminationsschritt

(Basisspalte wird zu Einheitsspaltenvektor)

- (i) *Das aktuelle Basiselement ist/wird zu Eins:*
Dividiere jedes Element der Basiszeile durch das Basiselement
- (ii) *Andere Elemente der Basisspalte sind/werden zu Null:*
Prüfe einzeln jede Nicht-Basiszeile:
Steht in einer *Nicht-Basiszeile* in der *Basisspalte* eine Zahl $z \neq 0$, so subtrahiere von dieser Zeile das z -fache der Basiszeile

→ weiter mit Schritt 5

5 Prüfung auf Unlösbarkeit

Ist in der *Koeffizientenmatrix* eine Nullzeile entstanden?

- ▷ Nein: → weiter mit Schritt 3

- ▷ Ja: Ist das zugehörige Element des Zielvektors $\neq 0$?

▷ Ja: Das LGS ist dann **nicht lösbar** → fertig

▷ Nein: → weiter mit Schritt 3

6 Bestimmung der Lösungsmenge aus dem Schlusstableau

- ▷ Ist eine der zu Nullzeilen der Koeffizientenmatrix gehörenden Zahlen des Zielvektors $\neq 0$, so ist das LGS **nicht lösbar**: $L = \emptyset$
 - Oft wird *bei Unlösbarkeit* das Schlusstableau mit elementaren Zeilenumformungen „verdeutlichend“ noch so äquivalent verändert, dass der nicht erreichbare Zielvektor zum Einheitsvektor wird (vgl. Nr. 38a).

Andernfalls ist das LGS lösbar. Die Anzahl der Lösungen hängt vom Vergleich von r und n ab (der Fall $r > n$ kann nicht auftreten):

- ▷ Ist $r = n$, so gibt es **genau eine Lösung**, die *ohne weitere Rechnung* aus der tabellarischen Form direkt in Gleichungsform übersetzt wird
- ▷ Ist $r < n$, so gibt es **unendlich viele Lösungen**:
 $n - r$ Variable sind frei wählbar, die übrigen r Variablen ergeben sich aus den r Gleichungen des Schlusstableaus (ohne Nullzeilen). Eine mögliche Auswahl solcher $n - r$ „freier“ und r festgelegter“ Variablen ist durch das Schlusstableau getroffen und kann wiederum *ohne weitere Rechnung* aus dieser tabellarischen Form direkt in Gleichungsform übersetzt werden. (Andere Auswahlen verändern nicht die Lösungen, sondern nur deren Darstellungsform.)

VORSICHT Falls bei der Umformung Spaltenvertauschungen vorgenommen wurden, sollte beim Aufschreiben der Lösungsmenge darauf geachtet werden, dass die Variablen nun *in der ursprünglichen Reihenfolge* genannt werden.

Jede bei den Schritten 2-4 (Elimination) vorgenommene elementare Zeilenumformung muss nachvollziehbar „protokolliert“ werden

33 Die obige Zahl r heißt **Rang** der Matrix A , kurz **rang(A)**. Es gilt:

$$1 \leq r \leq \min(m, n) = \text{Minimum aus Zeilen- und Spaltenanzahl}$$

$r = \text{rang}(A)$ ist gleichzeitig

- die maximale Anzahl der linear unabhängigen *Zeilen* von A , d.h. **die Anzahl nicht-redundanter Gleichungen des LGS**
- die maximale Anzahl der linearen unabhängigen *Spalten* von A , d.h. **die Anzahl der durch das LGS festgelegten Variablenwerte**

Eigenschaft: **rang(A) = rang(A^T)**

- $m - r$ Gleichungen sind überflüssig bzw. $n - r$ Variable sind frei wählbar

34 Hierbei heißen k Vektoren (Zeilen- bzw. Spaltenvektoren) mit je n Elementen **linear unabhängig**, wenn eine Linearkombination (= Summe von Vielfachen) der Vektoren mit dem Ergebnis Nullvektor nur möglich ist, wenn jeder Vektor mit dem Faktor Null eingeht – d.h. keiner dieser k Vektoren ist eine Linearkombination der anderen $k - 1$ Vektoren (= nicht linear abhängig von diesen). In Matrixschreibweise ausgedrückt: **Die Spalten einer Matrix A sind linear unabhängig, wenn das LGS $A \cdot x = 0$ (Nullvektor) die eindeutige Lösung $x = 0$ (Nullvektor) hat**

35 Anwendung des GJ-Algorithmus auf spezielle Fragestellungen insbes.: Weitere, am Schlusstableau ablesbare Informationen

a *Gefragt:* **Rang r einer Matrix A**

Vorgehen: Gaußalgorithmus für A durchführen, den Rang am Schlusstableau ablesen (= Dimension der erzeugten Einheitsmatrix = Anzahl der „Treppenstufen“)

Hinweis: Nach der Durchführung des GJ-Algorithmus eines LGS $A \cdot x = b$ lesen wir den Rang von A und $(A|b)$ am Schlusstableau ab. Das LGS $A \cdot x = b$ ist lösbar genau dann, wenn $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$

b *Gefragt:* Prüfung der **linearen Unabhängigkeit bzw. linearen Abhängigkeit von k Vektoren** (mit jeweils n Elementen)

Vorgehen: Fasse die Vektoren zu einer Matrix A zusammen (schreibe die Vektoren als Spalten, egal ob es sich um Zeilen- oder Spaltenvektoren handelt); führe den Gaußalgorithmus für das LGS $A \cdot x = 0$ durch.

▷ Die Vektoren sind linear unabhängig, falls sich die *eindeutige* Lösung $x = 0$ (Nullvektor) ergibt

▷ andernfalls sind sie linear abhängig und die Lösung x gibt an welche Linearkombination der Vektoren zum Nullvektor wird.

c *Gefragt:* Bestimmung der **Anzahl „überflüssiger“ Gleichungen** eines lösbaren LGS $A \cdot x = b$

Vorgehen: Die Anzahl überflüssiger Gleichungen ist gleich der Anzahl der im Schlusstableau $(A^*|b^*)$ entstandenen Nullzeilen.

d Simultane Durchführung des GJ-Algorithmus für mehrere Zielvektoren

- Gefragt:** Für eine feste Koeffizientenmatrix A die Lösungsmengen L_b zum LGS $A \cdot x = b$, L_c zum LGS $A \cdot x = c$ usw. ...
- Vorgehen:** *Ein* Durchgang des Algorithmus mit der rechts um alle Zielvektoren (Spalten) erweiterten Tabelle: $A|b|c|...$
Die Lösungsmengen L_b, L_c, \dots werden – wie bei einem Einzeldurchgang – aus dem jeweils zugehörigen Schlusstableau $(A^*|b^*), (A^*|c^*), \dots$ direkt abgelesen.
- Hinweis:** Dies erlaubt die Lösung/Lösbarkeitsprüfung einer **Matrixgleichung** $A \cdot X = B$ wie folgt: $(A|B) \rightarrow GJA \rightarrow (A^*|B^*)$
Für die einzelnen Spalten b, c, \dots der rechts stehenden Matrix B werden simultan die LGSe $A \cdot x = b, A \cdot x = c, \dots$ bearbeitet.
- ▷ Ist eines der LGSe nicht lösbar, so hat die gesamte Matrixgleichung $A \cdot X = B$ keine Lösung
 - ▷ Andernfalls ergibt sich die Lösungsmenge für X , deren Elemente also Matrizen sind, aus allen Möglichkeiten, eine Matrix X zu bilden mit Spalte 1 aus L_b , Spalte 2 aus L_c, \dots

e Inversenberechnung (Spezielle Form einer simultanen Durchführung = Lösung der Matrixgleichung $A_{n \times n} \cdot X = \mathbf{E}_{n \times n}$)

- Gefragt:** Existiert die Inverse einer $n \times n$ -Matrix? Falls ja, $A^{-1} = ?$
- Vorgehen:** Ein simultaner Durchgang des Algorithmus mit den Spalten \mathbf{e}_n^j der $n \times n$ -Einheitsmatrix als Zielvektoren, d.h. das Ausgangstableau ist $(A|\mathbf{E}_{n \times n})$.
- ▷ Falls sich als Schlusstableau die Form $(\mathbf{E}_{n \times n}|B)$, ergibt, so ist A invertierbar und der rechts stehende Tabellenteil B ist die Inverse A^{-1} $(A|\mathbf{E}_{n \times n}) \rightarrow GJA \rightarrow (\mathbf{E}_{n \times n}|A^{-1})$
 - ▷ Andernfalls ist A nicht invertierbar (und am Schlusstableau kann rechts abgelesen werden, welche(s) \mathbf{e}_n^j als Zielvektor(en) dies verhindern, nämlich der-/diejenigen \mathbf{e}_n^j , für die es *keine* eindeutige Lösung $A \cdot x = \mathbf{e}_n^j$ gibt)

Sie müssen sich nicht genau an die folgende äußere (Protokoll-)Form halten, aber: BITTE wählen Sie eine Form, die jeden Schritt gut nachvollziehbar macht, die Methode soll geprüft werden und Ihre Lösung soll dies erkennen lassen können/korrigierbar sein ...

Im **Protokoll** bezeichnen **I, II, ...** die erste, zweite, ... Zeile die jeweils vorhergehenden (erweiterten) Koeffiziententabelle. Neben jeder Zeile steht die Umformung (zusammengesetzt aus elementaren Zeilenumformungen), die dieses Zeilergebnis liefert. [In den Beispielen sind Basiszeilen fett gesetzt]

Bsp. 1 (Forts.) [E bezeichnet die Endprodukton, \mathbf{E} die Einheitsmatrix]

Hier ist $m = 2$ (Gleichungen), $n = 3$ (Variablenanzahl)

	E_1	E_2	$E_3 (=)$	b	Protokoll	
$A_{2 \times 3}$	5	10	5	150	I	$(Ausgangstabelle)$
	2	5	2	70	II	
	1	2	1	30	$\mathbf{I}/5$	
	2	5	2	70	II	
$\mathbf{E}_{2 \times 2}$	1	2	1	30	\mathbf{I}	
	0	1	0	10	$II - 2 \cdot \mathbf{I}$	
	1	0	1	10	$I - 2 \cdot \mathbf{II}$	$(Schlusstabelle)$
	0	1	0	10	\mathbf{II}	
	E_1	E_2	$E_3 (=)$	b^*		

$r = 2 = \text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$, es gibt $m - r = 0$ überflüssige Gleichungen, $n - r = 1$ Variablen sind frei wählbar (hier: E_3 , die Variable die nicht zu den Spalten der erzeugten Einheitsmatrix $\mathbf{E}_{2 \times 2}$ gehört).

Lösungsmenge (Übersetzung der Schlusstabelle in Gleichungsform)

$$L = \left\{ E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} E_1 = 10 - E_3 \\ E_2 = 10 \\ E_3 \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar} \end{array} \right\}$$

Bemerkung Bei ökonomischen Anwendungen wird eine solche allgemeine Lösungsmenge häufig durch zusätzliche inhaltliche Bedingungen eingeschränkt, in diesem Beispiel (Gesamtverarbeitung M_{RE}) könnten z.B. zusätzlich ein Mindestoutput $E = (3, 3, 3)^T$, der nicht unterschritten werden darf, vorgegeben und – bei nicht beliebig teilbaren Gütern – nur ganzzahlige Lösungen akzeptabel sein. Beide Forderungen werden dann die obige Lösungsmenge auf folgende, „ökonomische sinnvolle“ Lösungen einschränken (Aufzählung anhand der Festlegung von $E_3 = x_3$):

$$E = (E_1 \ E_2 \ E_3)^T \in L_{\text{faktisch}} = \{(7 \ 10 \ 3)^T, (6 \ 10 \ 4)^T, (5 \ 10 \ 5)^T, (4 \ 10 \ 6)^T, (3 \ 10 \ 7)^T\}$$

Bsp. 2 Gegeben ist das LGS („Rohform“ und übersichtlicher aufgeschrieben)

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$	$1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2$
$x_1 + x_3 = 0$	$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0$
$ax_2 + x_3 = 3$	$0 \cdot x_1 + a \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 3$

Hierbei ist a eine fixe, aber unbekannte Zahl (z.B. ein nicht beeinflussbarer und noch nicht festgelegter exogener ökonomischer Parameter).

(Erweiterte) Koeffiziententabelle und Algorithmus

x_1	x_2	x_3 (=)	b	Protokoll	} LGS als Tabelle
1	-1	2	2	<i>I</i>	
1	0	1	0	<i>II</i>	
0	a	1	3	<i>III</i>	
1	-1	2	2	I	
0	1	-1	-2	<i>II</i> - 1 · I	
0	a	1	3	<i>III</i> - 0 · I	
1	0	1	0	<i>I</i> + 1 · II	
0	1	-1	-2	II	
0	0	$1 + a$	$3 + 2a$	<i>III</i> - a · II	

Fall 1: $1 + a = 0$, d.h. $a = -1$.

Die letzte Zeile lautet dann: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 3 - 2$, d.h. $0 = 1$.

Dies ist unerfüllbar, also ist das LGS *nicht lösbar*.

[oder: $\text{rang}(A_{3 \times 3}) = 2 < 3 = \text{rang}(A|b) \Rightarrow$ LGS *nicht lösbar*]

Fall 2: $1 + a \neq 0$, d.h. $a \neq -1$: Division durch $1 + a$ ist nun erlaubt.

x_1	x_2	x_3	b	Protokoll
1	0	1	0	<i>I</i>
0	1	-1	-2	<i>II</i>
0	0	1	$\frac{3 + 2a}{1 + a}$	III / $(1+a)$
1	0	0	$-\frac{3 + 2a}{1 + a}$	<i>I</i> - 1 · III
0	1	0	$-2 + \frac{3 + 2a}{1 + a}$	<i>II</i> + 1 · III
0	0	1	$\frac{3 + 2a}{1 + a}$	III

Als eindeutige Lösung im Fall $a \neq 1$ (Tabelle wieder als LGS):

$$(*) \quad x_1 = -\frac{3+2a}{1+a}, x_2 = -2 + \frac{3+2a}{1+a} = \frac{1}{1+a}, x_3 = \frac{3+2a}{1+a}$$

Zusammenfassung, abhängig vom Wert von a :

- ▷ falls $a = -1$, so ist das LGS nicht lösbar,
- ▷ falls $a \neq -1$, so hat das LGS genau eine Lösung, nämlich (*).

Zusatzfrage: Gibt es eine Lösung $(x_1, x_2, x_3)^T$, bei der $x_2 = 1 - a$ ist?
 Wenn $x_2 = 1 - a$ sein soll, so ist dies

(Fall 1) nicht lösbar, wenn $a = -1$.

(Fall 2) lösbar für $a \neq -1$, wenn zusätzlich $\frac{1}{1+a} \stackrel{(*)}{=} x_2 = 1 - a$ gilt.

Dies ist der Fall, denn $\frac{1}{1+a} = 1 - a$ hat die (einzige) Lösung $a = 0$. Die eindeutige Lösung x des LGS ist dann nach (*) gegeben durch

$$x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T \quad \text{mit} \quad x_1 = -3, \ x_2 = 1, \ x_3 = 3.$$

Bsp. 3 Inverse Matrix

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Existiert die Inverse von A ? Falls ja: $A^{-1} = ?$

x_1	x_2	x_3 (=)	e_3^1	e_3^2	e_3^3	Protokoll
1	-1	2	1	0	0	I
1	0	1	0	1	0	II
0	0	1	0	0	1	III
1	-1	2	1	0	0	I
0	1	-1	-1	1	0	II - 1 · I
0	0	1	0	0	1	III
1	0	1	0	1	0	I + 1 · II
0	1	-1	-1	1	0	II
0	0	1	0	0	1	III
1	0	0	0	1	-1	I - 1 · III
0	1	0	-1	1	1	II + 1 · III
0	0	1	0	0	1	III

Links ist die Einheitsmatrix entstanden, also ist A invertierbar und A^{-1} ist die rechts stehende (3×3) -Matrix. *Probe:* $A^{-1} \cdot A = \mathbf{E}$ oder $A \cdot A^{-1} = \mathbf{E}$.

Mit dieser Information ist also (vgl. Thema 3.2) die eindeutige Lösung jeder Matrixgleichung $A \cdot x = b$ gegeben durch $x = A^{-1} \cdot b$. Insbesondere muss sich für $b = (2 \ 0 \ 3)^T$ die obige Lösung $x = (-3 \ 1 \ 3)^T$ ergeben (vgl. Bsp. 2):

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Diese Lösung hätten wir z.B. auch dadurch erhalten, dass wir den Zielvektor $b = (2 \ 0 \ 3)^T$ simultan zur Inversenberechnung mit umformen.

Bsp. 4 Lineare (Un-)Abhängigkeit

von Spaltenvektoren der folgenden Ausgangstabelle. Zu lösen ist $A \cdot x = \mathbf{0}$. (Der Zielvektor $\mathbf{0}$ wird manchmal nicht mit tabelliert, weil er unter elementaren Zeilenumformungen unverändert bleibt.)

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Protokoll	
1	1	1	2	0	<i>I</i>	
-1	0	-1	-1	0	<i>II</i>	
1	1	-1	2	0	<i>III</i>	
3	2	1	5	0	<i>IV</i>	
4	0	2	4	0	<i>V</i>	
1	1	1	2	0	I	
0	1	0	1	0	<i>II + I</i>	
0	0	-2	0	0	<i>III - I</i>	
0	-1	-2	-1	0	<i>IV - 3 · I</i>	
0	-4	-2	-4	0	<i>V - 4 · I</i>	
1	0	1	1	0	<i>I - II</i>	
0	1	0	1	0	II	
0	0	1	0	0	<i>III / (-2)</i>	
0	0	-2	0	0	<i>IV + II</i>	
0	0	-2	0	0	<i>V + 4 · II</i>	
$\mathbf{E}_{3 \times 3}$	1	0	0	1	0	<i>I - III</i>
	0	1	0	1	0	<i>II</i>
	0	0	1	0	0	III
	0	0	0	0	0	<i>IV + 2 · III</i>
	0	0	0	0	0	<i>V + 2 · III</i>

Demnach ist $\text{rang}(A) = 3 =$ maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (bzw. Zeilenvektoren) von A . Weder die Zeilen noch die Spalten von A sind insgesamt linear unabhängig.

Ergänzung:

Die Lösung x des Schlusstableaus gibt die Form der linearen Abhängigkeit zwischen den vier Spalten von A an. Der Nullvektor ergibt sich mit den Faktoren $x_1 = 0 - x_4, x_2 = 0 - x_4, x_3 = 0, x_4 \in \mathbb{R}$ (frei wählbar):

$$(-x_4) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + (-x_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z.B. für $x_4 = -1$ anders formuliert: 1. Spalte + 2. Spalte = 4. Spalte

Zahlenfolgen und deren Grenzwerte

Wichtige Begriffsbildungen, darunter die reellen Zahlen \mathbb{R} , Exponentialfunktion und Logarithmus sowie Ableitung und Integral von Funktionen sind definiert (bzw. definierbar) mit Hilfe von Zahlenfolgen und deren *Grenzwerte*. Marginales Änderungsverhalten ökonomischer Zusammenhänge kann durch Grenzwerte von Zahlenfolgen analysiert werden. Systematische Rechenverfahren (Algorithmen) oder Schätzverfahren (\triangleright Statistik) werden u.a. danach bewertet, ob und wie sie *konvergieren*.

Zahlenfolge

Eine eindeutige Aufzählung von Zahlen a_i , fortlaufend nummeriert/indiziert mit $i \in \mathbb{N}$ oder $(i \in \mathbb{N}_0)$ (kurz: Folge)

Allgemeine Schreibweise: $a_i, i \in \mathbb{N}$ oder $(a_i, i \in \mathbb{N}_0)$ unendliche Folgen
 $a_i, i = 1, \dots, n,$ endliche Folgen

Eindeutige Aufzählung:

- Angabe eines Bildungsgesetzes von a_i für jeden Index i
- direkte Aufzählung (nur bei endlichen Folgen)

Bsp. $a_i := 2i - 1, i \in \mathbb{N}$, die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen

$c_k := 0, k \in \mathbb{N}$, die *konstante* Folge von Nullen

$d_n := f(a_n), n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionswerten wobei $(a_n, n \in \mathbb{N})$, eine Zahlenfolge ist und f eine fest gewählte Funktion

Spezielles Bildungsgesetz

Geometrische Folge

konstante relative Änderung = $q - 1 \neq 0$ Keine rel. Änderung: $q = 1$

Startwert (a_0 bzw. a_1), Bildungsgesetz: $a_{i+1} = a_i \cdot q$ ($q \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ fix)

äquivalent: $a_i = a_1 \cdot q^{i-1}$ $i \in \mathbb{N}$

bzw.: $a_i = a_0 \cdot q^{i-1}$ $i \in \mathbb{N}_0$

Der Beginn der Nummerierung wird meist von der Fragestellung abgeleitet, z.B. davon, ob Zeiträume $1, \dots, n$ im Vordergrund stehen oder die hierzu gehörigen Zeitpunkte $0, 1, \dots, n$.

Bsp. (Anlagerendite)

Die Anlage eines Guthabens von 980 Euro werde jährlich mit 2% verzinst. Dann beträgt der Zinsertrag im n -ten Jahr $a_n := 980 \cdot 0.02^n$ Euro. Daraus ergibt sich die Folge möglicher Zinserträge

$$980 \cdot 0.02^n, n \in \mathbb{N}.$$

Sie ist ein Beispiel für eine geometrische Folge. Eine mögliche Frage ist, wie Zinserträge (approximativ) in ferner Zukunft aussehen werden? Dies führt zum Begriff *Konvergenz von Zahlenfolgen* (s.u.).

36 Nullfolge / Konvergenz $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Schranken $C > 0$

Wenn es zu jeder vorgegebenen Schranke c (maximale Abweichung) eine Nummer n_c gibt, ab der jedes Folgenglied $|a_n| \leq C$ erfüllt, so heißt $(a_n, n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge und die Zahl 0 Grenzwert/Limes dieser Folge.

Der kritische Index n_C darf abhängig von der Schranke C gewählt werden.

Schreibweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ oder $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ oder $(a_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ <ul style="list-style-type: none"> • für $a_n := p ^n, n \in \mathbb{N}$, wenn $p \in \mathbb{R}$ fix, $p < 1$ • für $a_n := (1/n)^r, n \in \mathbb{N}$, wenn $r \in \mathbb{Q}$ fix, $r > 0$
--

37 Konvergente Folge / Konvergenz $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \in \mathbb{R}$

Wenn es zu einer Folge $(a_n, n \in \mathbb{N})$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, mit der die betraglichen Abweichungen $|a_n - a|, n \in \mathbb{N}$, eine Nullfolge bilden, so heißt die Folge konvergent und die Zahl a Grenzwert/Limes dieser Folge.

Schreibweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$ oder $(a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty)$

$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \Leftrightarrow a_n - a \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$	mit $a \in \mathbb{R}$
---	------------------------

- Jede Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$, hat entweder keinen oder einen (eindeutigen) Grenzwert.
- Die Eulersche Zahl e , $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/(0!) + \dots + 1/(n!)) = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \approx 2.71828$, ist Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen, aber selbst nicht rational.

- Gilt $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, so macht die Sprechweise $a \approx a_n$ für genügend große n

Sinn und es können – nach Vorgabe einer benötigten Genauigkeit C – Folgenglieder a_n mit $n \geq n_C$ für Hilfsüberlegungen verwendet werden. Je nach Folge jedoch drastische Unterschiede im benötigten n_C (Rechenaufwand!!):

$$\text{Bsp. } |e - (\frac{1}{0!} + \dots + \frac{1}{n!})| \leq 10^{-3} \quad \text{für } n \geq 6, \quad e \approx (\frac{1}{0!} + \dots + \frac{1}{n!}) \quad \text{für } n \geq 6$$

$$|e - (\frac{n+1}{n})^n| \leq 10^{-3} \quad \text{für } n \geq 1359, \quad \text{aber } |e - (\frac{n+1}{n})^n| > 10^{-3} \quad \text{für } n < 1359$$

Exponentialfunktion $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^0}{0!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n} \right)^n$ für $x \in \mathbb{R}$

38 (Uneigentlicher) Grenzwert $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ bzw. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty : \Leftrightarrow a_n > 0 \text{ ab einer Nummer } n_0 \text{ und } (1/a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty : \Leftrightarrow a_n < 0 \text{ ab einer Nummer } n_0 \text{ und } (1/a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ • für $a_n := |q|^n, n \in \mathbb{N}$, wenn $q \in \mathbb{R}$ fix, $|q| > 1$
 • für $a_n := (n+d)^r, n \in \mathbb{N}$, wenn $d \geq 0, r \in \mathbb{Q}$ fix, $r > 0$

Oft werden Zahlenfolgen, deren Grenzwerte bekannt sind, miteinander verkettet. Die Frage stellt sich dann, ob aus der Konvergenz der beteiligten einzelnen Zahlenfolgen auf die Konvergenz der zusammengesetzten Zahlenfolgen geschlossen werden kann.

Bsp. 1

(a) $a_n := \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$. Bekannt: $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ?$

(b) $a_n := -\left(\frac{1}{n}\right)^r, n \in \mathbb{N}$, für $r \in \mathbb{Q} \cap]0, \infty[$. Bekannt: $-1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1, \left(\frac{1}{n}\right)^r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ?$

(c) $a_n := c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + d, n \in \mathbb{N}$, für $c, d \in \mathbb{R}$. Bekannt $c \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c, \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, d \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d$. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ?$

(d) $a_n := c \cdot 2^n, n \in \mathbb{N}$, für $c \in \mathbb{R}$. Bekannt: $c \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c, 2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ?$

(e) $a_n := \frac{d}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-e}}, n \in \mathbb{N}$, für $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bekannt: $d \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e, e \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$.
 $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ?$

Bei einigen Typen von Zusammensetzungen ist bekannt, wie von der Konvergenz einzelner Zahlenfolgen auf die Konvergenz von zusammengesetzten Zahlenfolgen geschlossen werden kann. Eine Übersicht bieten die folgenden Rechenregeln.

39 Rechenregeln für Folgen

Für konvergente Folgen $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$, $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ gilt:

- wenn die Grenzwerte $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ sind:

$$a_n \pm b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \pm b, \quad a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b, \quad \frac{a_n}{c_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{c}$$

- wenn $c = 0$ oder uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$ beteiligt sind:

!!! Die Rechenausdrücke $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ sind nicht definiert

ansonsten kann der sich ergebende Grenzwert aus den folgenden Rechenregeln erschlossen werden:

$$\begin{aligned} -(-\infty) &:= \infty \\ \infty + \infty &:= \infty & d + \infty &:= \infty \text{ für } d \in \mathbb{R} \\ \infty \cdot \infty &:= \infty \text{ für } d \in \mathbb{R} & d \cdot \infty &:= \infty \text{ für } d > 0 \\ d/\infty &:= 0 \text{ für } d \in \mathbb{R} & \infty/d &:= \infty \text{ für } d > 0 \end{aligned}$$

Bsp. 2 (Bei Quotienten mit Potenzen von n passendes) Hilfsmittel zum Umformen von a_n/b_n , wenn $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ und $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$: *Division durch die höchste Nennerpotenz*

$$\text{a) } \frac{n-1}{2n^2+1} = \frac{n^{-1}-n^{-2}}{2+n^{-2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{0-0}{2+0} = 0$$

$$\text{b) } \frac{2n^{3/2}-4n+5}{3n^{3/2}+2n^{1/2}-3} = \frac{2-4n^{-1/2}+5n^{-3/2}}{3+2n^{-1}-3n^{-3/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{2-0+0}{3+0-0} = \frac{2}{3}$$

$$\text{c) } \frac{3n^{5/3}-n^{1/2}+1}{n^{3/2}+2n-3} = \frac{3n^{1/6}-n^{-1}+n^{-3/2}}{1+2n^{-1/2}-3n^{-3/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{3 \cdot \infty - 0 + 0}{1+0-0} = \infty$$

Bsp. 3 Für $\alpha, \beta > 0$ fix: $n^\alpha \cdot n^{-\beta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \cdot 0$? Nicht definiert, aber

$$n^\alpha \cdot n^{-\beta} = n^{\alpha-\beta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha < \beta \\ 1 & \text{falls } \alpha = \beta \\ \infty & \text{falls } \alpha > \beta \end{cases}$$

Bsp. 4 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty - \infty$? Nicht definiert aber

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\infty + \infty} = 0$$

Marginales Änderungsverhalten ökonomischer Zusammenhänge

Durch Funktionen $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $D(f) \subset \mathbb{R}$ einer Variablen können oftmals Zusammenhänge zwischen zwei ökonomischen Größen beschrieben und analysiert werden. Die ökonomische Größe, deren Werte in die Funktion eingesetzt werden, heißt *unabhängige* Größe. Die ökonomische Größe, deren Werte sich aus den Funktionswerten ergeben, wird *abhängige* Größe genannt. Eine grundlegende Fragestellung für ökonomische Entscheidung wie z.B. Investitionen oder wirtschaftspolitische Steuerung besteht darin, welche Effekte marginale Änderungen bei den Werten der unabhängigen Größe für die Werte der abhängigen Größe besitzen. Marginale Änderungen in den Werten der abhängigen Größe wird mathematisch dargestellt durch Grenzwerte von Zahlenfolgen. Werden die Zahlenfolgen in die Funktion eingesetzt, entstehen neue Zahlenfolgen, die Funktionswertfolgen. Das (mögliche) Konvergenzverhalten der Funktionswertfolgen beschreibt dann einen ersten Effekt für die marginalen Änderungen in den Werten der unabhängigen ökonomischen Größe.

(Uneigentliche) Grenzwerte von Zahlenfolgen \triangleright Nrn. 36-39

40 Grenzwert einer Funktion f in x_0

$$x_0 \in [a, b] \subset D(f)$$

Die Zahl x_0 ist also als Grenzwert erreichbar durch Zahlenfolgen $x_n, n \in \mathbb{N}$, für die (für alle $n \in \mathbb{N}$) $x_n \in D(f)$ und $x_n \neq x_0$ gilt.

Eine Zahl c heißt Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0 , wenn für JEDE Folge $(x_n, n \in \mathbb{N})$ mit $x_n \in D(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$ gilt: $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c$.

Schreibweisen GW $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ oder $f(x) \rightarrow c$ für $x \rightarrow x_0$

Für einen linksseitigen Grenzwert werden nur Folgen mit $x_n < x_0$, für einen rechtsseitigen Grenzwert werden nur Folgen mit $x_n > x_0$, zugelassen.

Schreibweisen LGW $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = c$ oder $f(x) \rightarrow c$ für $x \rightarrow x_0^-$

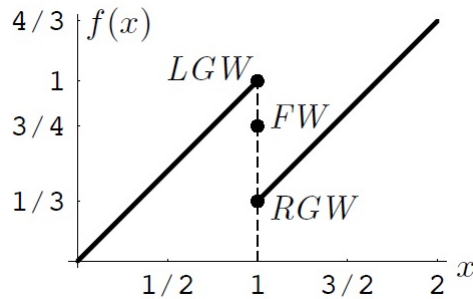
Schreibweise RGW $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = c$ oder $f(x) \rightarrow c$ für $x \rightarrow x_0^+$

Existieren links- und rechtsseitiger Grenzwert, und sind beide gleich der einen Zahl c , so ist auch der Grenzwert gleich c (und umgekehrt).

GW = LGW = RGW

Rechenregeln für Grenzwerte \triangleright wie Nr. 39

Bsp. 5



$$x_0 = 1, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & \text{für } x = 1 \\ x - 2/3 & \text{für } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{LGW: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

$$\text{FW: } f(1) = 3/4$$

$$\text{RGW: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2/3) = 1/3$$

41 Grenzwerte von Grundfunktionen

Bei den **Grundfunktionen** $|x|$, x^r ($r \in \mathbb{Q}$), e^x und $\ln x$ gilt:

Grenzwert der Funktion in x_0 = Funktionswert in x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^r = x_0^r$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$$

Als Sonderfälle für die Stelle x_0 und den (dann „uneigentlich“ genannten) Grenzwert c einer Funktion sind auch die „idealen Zahlen“ $\pm\infty$ zugelassen, d.h. der uneigentliche Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ (sog. Polstellen) und die Grenzwertbildung $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ [bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$] für alle uneigentlichen Grenzwerte von Folgen $x_n \rightarrow \infty$ [bzw. $x_n \rightarrow -\infty$]

Bsp. 6

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = \lim_{x \rightarrow \infty} |x| = \infty$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^r = \infty \text{ für } r \in \mathbb{Q} \text{ positiv}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} x^r = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^r = 0 \text{ für } r \in \mathbb{Q} \text{ negativ}$$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$

Die Rechenregeln für Folgen können für die Grenzwerte von Funktionen übertragen werden.

42 Regeln für Grenzwerte von Funktionen

$\alpha \in \mathbb{R}$ konstant

Sind f und g Funktionen, für die der Grenzwert in x_0 existiert, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f/g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \text{ wenn } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

Existieren $y_0 := \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ und $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$ dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y).$$

Funktionen, bei denen die Grenzwerte gerade mit den Funktionswerten übereinstimmen, bilden eine eigenen Klasse.

43 Stetigkeit einer Funktion f in x_0

$x_0 \in [a, b] \subset D(f)$

Stetigkeit von f in x_0 :

LGW=FW=RGW

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existiert und } f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Ist f an **jeder** Stelle $x_0 \in D(f)$ stetig, so heißt f **stetig**.

Anschaulich bedeutet Stetigkeit, dass der Graph einer Funktion an der betrachteten Stelle nicht springt.

Bsp. 7 Die Funktion f aus Bsp. 5 ist **nicht stetig** in $x_0 = 1$, aber **stetig** in jeder anderen Stelle $x_0 \in [0, 2] \setminus \{1\}$.

Die Grenzwerteigenschaft stetiger Funktionen berechtigt dazu, den Funktionswert eines (im Modell) stetigen f an einer *rechnerisch ungünstigen oder praktisch nicht realisierbaren* Stelle x durch den Funktionswert an einer *rechnerisch günstigeren oder praktisch realisierbaren* Stelle x_0 abzuschätzen:

Näherung für $f(x)$ bei stetigen Funktionen: $x \approx x_0 \Rightarrow f(x) \approx f(x_0)$

Marginalanalyse ökonomischer Zusammenhänge

Wird ein ökonomischer Zusammenhang durch eine stetige Funktion beschrieben, so bedeutet **interpretatorisch** eine „kleine“ absolute Änderung der unabhängigen ökonomischen Größe eine „kleine“ absolute Änderung der abhängigen ökonomischen Größe.

Aus den Regeln für Grenzwerte von Funktionen (Nr. 42) ergeben sich folgende Regeln für stetige Funktionen.

44 Regeln für stetige Funktionen

$\alpha \in \mathbb{R}$ konstant

Sind f und g stetig in x_0 , dann auch

$$\alpha f, f \pm g, f \cdot g \text{ und, wenn } g(x_0) \neq 0, f/g.$$

Ist g stetig in x_0 und f stetig in $y_0 = g(x_0)$, dann ist $f(g(x))$ stetig in x_0 .

45 Stetigkeit von Grundfunktionen

Die Grundfunktionen $|x|$, x^r ($r \in \mathbb{Q}$), e^x und $\ln x$ sind stetig.

Damit sind auch Funktionen stetig, die nach obigen Regeln (Nr. 44) aus stetigen Grundfunktionen zusammengesetzt sind.

Stückweise Stetigkeit

endlich viele Stücke

Eine Funktion, die „stückweise“ (mit angrenzenden Stücken) definiert ist und die in jeder Stelle ihres Definitionsbereiches – mit Ausnahme mindestens einer Stückgrenze (Nahtstelle) – stetig ist, nennen wir **stückweise stetig**.

Differentiation einer Funktion mit einer Veränderlichen

Wir konzentrieren uns auf Funktionen $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$, $D(f) \subset \mathbb{R}$

Als eine wichtige Eigenschaft einer Funktion mit einer Variablen haben wir die Stetigkeit in den Einsetzstellen kennen gelernt (\triangleright Nr. 43). Die Stetigkeit einer Funktion $f(x)$ in x_0 erlaubt die Abschätzung $f(x) \approx x_0$, falls $x \approx x_0$. Solche Näherungen können sehr grob sein und sie erfassen nicht die Abhängigkeit der Änderungen von $f(x)$ von den Änderungen von x .

Ausgangspunkt einer „Marginalanalyse“

Was mensch genauer haben möchte, ist etwas von der Form

$$f(x) - f(x_0) \approx c \cdot (x - x_0)$$

also eine Aussage über eine (ungefähre) proportionale Abhängigkeit der Abweichung $f(x) - f(x_0)$ von den „kleinen“ Abweichungen $x - x_0$. Hierbei soll der *Proportionalitätsfaktor* c allenfalls von der „Basisstelle“ x_0 abhängen.

Anders formuliert:

Der Differenzenquotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ soll für jedes x_0 durch eine einzige Konstante ersetzt werden, die für alle x in der „Nähe“ von x_0 „ungefähr“ gültig ist. Bei differenzierbaren Funktionen wird dies mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten $c := f'(x_0)$ möglich:

46 Differenzierbarkeit einer Funktion f in x_0

$$x_0 \in [a, b] \subset D(f)$$

liegt vor, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ die Ableitung von } f \text{ in } x_0 \text{ existiert.}$$

Mit $D(f') := \{x \in \mathbb{R} : f \text{ differenzierbar in } x\}$ wird eine neue Funktion definiert

$$f' : D(f') \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f'(x).$$

Diese wird die **Ableitungsfunktion von f** genannt.

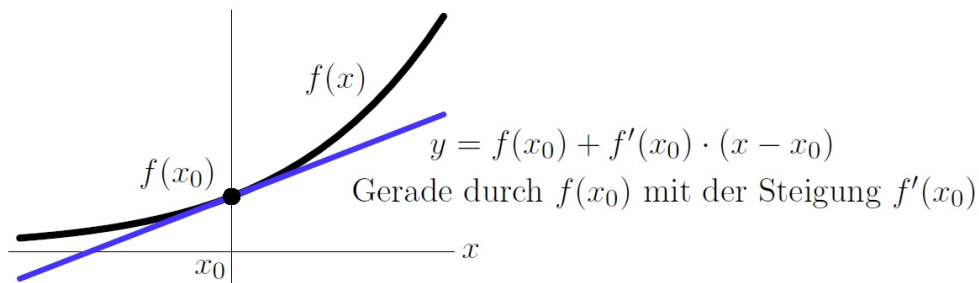
Ist f an **jeder** Stelle $x_0 \in D(f)$ differenzierbar, so heißt **f differenzierbar**.

46a Die Grenzwertbildung für die Ableitung berechtigt zu dem marginalen (grenzwertigen) Ansatz:

Näherung für $f(x)$ bei differenzierbaren Funktionen an der Basisstelle x_0
 $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ bzw. $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ ist die **Tangentengleichung** an f in $(x_0, f(x_0))$

Bsp.1



Eine in x_0 differenzierbare Funktion ist auch in x_0 stetig.

VORSICHT

Die Stetigkeit der Funktion $f(x)$, nicht der Ableitung $f'(x)$ folgt – die Ableitung wird zwar meist, muss aber nicht stetig sein.

47 Differenzierbarkeit von Grundfunktionen

Die **Grundfunktionen** $|x|$, x^r ($r \in \mathbb{Q}$), e^x und $\ln x$ sind in den nachfolgend (als $D(f')$) angegebenen Bereichen **differenzierbar**. Damit sind auch **Funktionen differenzierbar**, die nach folgenden **Regeln** (Nr.48) aus **differenzierbaren Grundfunktionen zusammengesetzt** sind.

▷ Bei der Zusammensetzung Differenzierbarkeitsbereiche beachten

47a	$f(x)$	$D(f)$	$D(f')$	$f'(x)$
1	c (konstant)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	0
2	$ x $	\mathbb{R}	$\mathbb{R}_{\neq 0}$	$\begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$
3a	x^k ($k \in \mathbb{N}$)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$k \cdot x^{k-1}$
3b	x^{-k} ($k \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}_{\neq 0}$	$\mathbb{R}_{\neq 0}$	$-k \cdot x^{-k-1}$
4a	$x^{1/k}$ ($k \in \mathbb{N}$ gerade)	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\mathbb{R}_{> 0}$	$\frac{1}{k} x^{1/k-1}$
4b	$x^{1/k}$ ($k \in \mathbb{N}$ ungerade)	\mathbb{R}	$\mathbb{R}_{\neq 0}$	
4c	x^r ($r \in \mathbb{Q}$)	$\mathbb{R}_{> 0}$	$\mathbb{R}_{> 0}$	$r \cdot x^{r-1}$
5	$\ln x$	$\mathbb{R}_{> 0}$	$\mathbb{R}_{> 0}$	x^{-1}
6a	e^x	\mathbb{R}	\mathbb{R}	e^x
6b	$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}_{\neq 0}$)	$\mathbb{R}_{> 0}$	$\mathbb{R}_{> 0}$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
6c	$b^x = e^{x \ln b}$ ($b \in \mathbb{R}_{> 0}, b \neq 1$)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$(\ln b) \cdot b^x$

Fast alle in der ökonomischen Anwendungen betrachteten Funktionen setzen sich – unter Verwendung der bei den folgenden Rechenregeln betrachteten Operationen *Vielfache* [$\alpha f(x)$], *endliche Summen* [$f(x) \pm g(x)$], *Produkte* [$f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$] und *Kompositionen* [$f(g(x))$] – aus den obigen Funktionstypen zusammen.

(6b-c) sind bereits abstrakte Beispiele für die Anwendung der unten folgenden Kettenregel (KR).

48 Regeln für differenzierbare Funktionen $\alpha \in \mathbb{R}$ konstantSind f und g differenzierbar in x_0 , dann auch

$$\alpha f, f \pm g, f \cdot g \text{ und wenn, } g(x_0) \neq 0, f/g.$$

Ist g differenzierbar in x_0 und f differenzierbar in $y_0 = g(x_0)$, dann ist $f(g(x))$ differenzierbar in x_0 .Die Ableitungen ergeben sich (auch) aus den Ableitungen der an der neu zusammengesetzten Funktion beteiligten Funktionen, jeweils an der Stelle x_0 :

$(\alpha f)' = \alpha f'$	konstante Faktoren ausklammern
$(f \pm g)' = f' \pm g'$	Summen gliedweise differenzieren
(PR) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	Produktregel
(QR) $(f/g)' = (f' \cdot g - f \cdot g')/g^2$	Quotientenregel
(KR) $(f(g))' = f'(g) \cdot g'$	Kettenregel

Bsp. 2 (Kettenregel)

(a) $f(x) = (1 + x^2)^3, f'(x) = 3(1 + x^2)^{3-1} (2x) = 6x(1 + x^2)^2$

(b) $f(x) = (1 + x^2)^{-3/2}, f'(x) = \frac{-3}{2}(1 + x^2)^{-3/2-1} (2x) = -3x(1 + x^2)^{-5/2}$

(c) $f(x) = (1 + x^2)^{\sqrt{2}}, f'(x) = \sqrt{2}(1 + x^2)^{\sqrt{2}-1} (2x) = 2^{3/2}x(1 + x^2)^{\sqrt{2}-1}$

(d) $f(x) = \ln(1 + x^2), f'(x) = \frac{(2x)}{(1 + x^2)}$ $z \quad z'$

(e) $f(x) = e^{(1 + x^2)}, f'(x) = e^{(1 + x^2)} \cdot (2x)$

(f) $f(x) = \ln(1 + e^{1+x^2}), f'(x) = \frac{(1 + e^{1+x^2})'}{1 + e^{1+x^2}} = \frac{e^{1+x^2} \cdot (2x)}{1 + e^{1+x^2}}$ *Bsp. 2 (e)*

Anwendung 1: Dimensionslose Marginalanalyse

Die Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion f in einer Stelle x_0 gibt einen approximativen Proportionalitätsfaktor an für die absoluten Änderungen der Funktionswerte (der abhängigen ökonomischen Größe) im Verhältnis zu den absoluten Änderungen der Werte von x (der unabhängigen ökonomischen Größe) in der Basisstelle x_0 . Für ökonomische Zusammenhänge ist es oftmals interessant, das proportionale Änderungsverhalten der abhängigen ökonomischen Größe gegenüber der unabhängigen Größe so zu beschreiben, dass verwendete Maßeinheiten für die Werte der ökonomischen Größen keine Rolle spielen.

Dimensionslose „Marginalanalyse“

Gesucht ist etwas von der Form

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} \approx c \cdot \frac{x - x_0}{x_0}$$

also eine Aussage über eine (ungefähre) proportionale Abhängigkeit der relativen Abweichung $(f(x) - f(x_0))/f(x_0)$ von den „kleinen“ relativen Abweichungen $(x - x_0)/x_0$. Hierbei soll der *Proportionalitätsfaktor* c allenfalls von der „Basisstelle“ x_0 abhängen.

49 Elastizität von f

- $\mathcal{E}_{\text{diskret}}^f(x_{\text{neu}}) := \frac{f(x_{\text{neu}}) - f(x_{\text{alt}})}{\frac{x_{\text{neu}} - x_{\text{alt}}}{x_{\text{alt}}}}$ heißt **diskrete Elastizität von f** .
- $\mathcal{E}^f(x) := \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$ heißt **Elastizität von f an der Stelle x**

$\mathcal{E}^f(x_{\text{alt}})$ ist also gleich dem Grenzwert $\lim_{x_{\text{neu}} \rightarrow x_{\text{alt}}} \mathcal{E}_{\text{diskret}}^f(x_{\text{neu}})$.

49a Mit Nr. 49 kann man für x „in der Nähe“ von x_0 schreiben

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} \approx \mathcal{E}^f(x_0) \cdot \frac{x - x_0}{x_0} \quad \text{proportional}$$

Die Elastizität von f gibt an einer Basisstelle x_0 annähernd den Faktor an, mit dem sich eine relative Änderung von x bzgl. x_0 in eine relative Änderung von $f(x)$ bzgl. $f(x_0)$ übersetzt. Je nach Ausmaß dieses Faktors heißt

- f elastisch in x_0 , wenn $|\mathcal{E}^f(x_0)| > 1$ überproportional
- f 1-elastisch in x_0 , wenn $|\mathcal{E}^f(x_0)| = 1$ 1:1-proportional
- f unelastisch in x_0 , wenn $|\mathcal{E}^f(x_0)| < 1$ unterproportional

Wir erwähnen hier noch eine gebräuchliche (alternative) Notation für das proportionale Änderungsverhalten, das durch Elastizität gemessen wird.

$$\frac{df}{f(x_0)} \approx \mathcal{E}^f(x_0) \cdot \frac{dx}{x_0} \quad \text{proportional}$$

Hierbei soll $dx \approx x - x_0$ für *kleine Abweichung* von x gegenüber x_0 stehen und $df \approx f(x) - f(x_0)$ kann dann entsprechend für Abweichung von $f(x)$ gegenüber $f(x_0)$ verstanden werden.

Bsp. 3 Beispiel zu Elastizität

„Ökonomisches“ teils vereinfacht

Für $x > 0$ sei $p(x) = 100(x + 10)^{-1}$ eine Funktion, die den *Zusammenhang zwischen Preis p und Nachfrage x* beschreiben soll, hier den Preis in Abhängigkeit von der Nachfrage x . Wie sieht die ungefähre relative Preisänderung aus, wenn die Nachfragemenge vom Basiswert $x_{alt} = 40$ Einheiten um 10% reduziert wird?

Berechnung der Elastizität

$$p'(x) = -100(x + 10)^{-2} < 0, \text{ d.h. } p'(40) = -\frac{4}{100}$$

$$\mathcal{E}^p(40) = \frac{p'(40)}{p(40)} \cdot 40 = \frac{-4/100}{2} \cdot 40 = -\frac{8}{10}$$

Relative Änderung

$$\frac{dp}{p(40)} = \frac{p(36) - p(40)}{p(40)} \approx \mathcal{E}^p(40) \cdot \frac{dx}{40} = \left(-\frac{8}{10}\right) \cdot (-10\%) = +8\%$$

Wegen $|\mathcal{E}^p(40)| = 0.8 < 1$ ist p „inelastisch“ bzgl. x an der Stelle $x_{alt} = 40$.

Anwendung 2: Monotonieverhalten

50 Monotonie einer differenzierbaren Funktion

[Monotonie ▷ Nr.8]

$f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow f$ ist **streng monoton wachsend** über $[a, b]$

$f'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow f$ ist **streng monoton fallend** über $[a, b]$

$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow f$ ist **monoton wachsend** über $[a, b]$

$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow f$ ist **monoton fallend** über $[a, b]$

Anwendung 3: Optimierung einer Funktion

51 Extrempunkte einer Funktion f

Extremum = Min. oder Max.

- $(x_0, f(x_0))$ heißt **lokales Maximum von f** , wenn um x_0 herum ein Intervall I gebildet werden kann so, dass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D(f)$ mit $x \in I$.
- $(x_0, f(x_0))$ heißt **lokales Minimum von f** , wenn um x_0 herum ein Intervall I gebildet werden kann so, dass $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D(f)$ mit $x \in I$.
- Ein lokales Maximum (bzw. Minimum) heißt **global**, wenn der entsprechende Wertevergleich von $f(x_0) \geq f(x)$ (bzw. $f(x_0) \leq f(x)$) für jedes x aus dem Definitionsbereich von f richtig ist.
- x_0 heißt **Extremstelle**, $f(x_0)$ **Extremwert**, $(x_0, f(x_0))$ **Extrempunkt**.

Standardmethoden zur Berechnung von Extrempunkten reduzieren die Suche nach möglichen Extremstellen auf die Bestimmung von Stellen, deren Ableitungen den Wert Null annehmen.

Stationäre Stellen einer Funktion f

Eine Stelle x_0 mit $f'(x_0) = 0$ heißt **stationäre Stelle von f**

Jede *stationäre Stelle* x_0 ist eine *mögliche Extremstelle* von f , die Tangente in $f(x_0)$ ist parallel zur x -Achse ($y = f(x_0)$, Steigung $f'(x_0) = 0$)

Stationäre Stellen einer Funktion f sind potentielle Extremstellen. Entscheidend ist, in einem nächsten Schritt das Monotonieverhalten von f in der „Nähe“ einer stationären Stelle x_0 zu untersuchen

„nahe“ links von x_0		„nahe“ rechts von x_0		Art der Extremstelle
monoton wachsend	+	monoton fallend	\Rightarrow	x_0 lokale Maximalstelle
monoton fallend	+	monoton wachsend	\Rightarrow	x_0 lokale Minimalstelle

Gemäß Nr. 50 läßt sich das Monotonieverhalten von Funktionen durch Vorzeichen von Ableitungen beschreiben. Damit liest sich dann die Bestimmung von Extrempunkten folgendermaßen:

„links“ von x_0		„rechts“ von x_0		Art der Extremstelle
Ableitung ≥ 0	+	Ableitung ≤ 0	\Rightarrow	x_0 lokale Maximalstelle
Ableitung ≤ 0	+	Ableitung ≥ 0	\Rightarrow	x_0 lokale Minimalstelle

Nach Ermittlung von stationären Stellen geht es also in einem zweiten Schritt darum, die Vorzeichenbereiche der Ableitungsfunktion in der „Nähe“ der stationären Stellen zu bestimmen. Dafür können die Ableitungen der Ableitungsfunktion sehr hilfreich sein.

Schreibweise $f^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$ für die n -te Ableitung von f

Die n -te Ableitung ($n \geq 1$) einer Funktion f ist sukzessive definiert als Ableitung der $(n - 1)$ -ten Ableitung von f (wenn es die Ableitung gibt)

$$\text{Anfang: } f^{(0)}(x) := f(x),$$

$$\text{Schritt 1: } f^{(1)}(x) := (f^{(0)})'(x) = f'(x),$$

$$\text{Schritt 2: } f^{(2)}(x) := (f^{(1)})'(x) = f''(x),$$

$$\text{Schritt } n: f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x).$$

1.-3. Ableitung werden meist mit f' , f'' , f''' bezeichnet, dann $f^{(4)}$, $f^{(5)}$...

Kriterien und Methode für über $[a, b]$ mehrfach differenzierbare Funktionen f

52 Extrempunktbestimmung

$$D(f) = [a, b]$$

1 Berechne f' und f'' über $[a, b]$

2 Bestimme die **strikten Vorzeichenbereiche \pm von f'** in $[a, b]$
 Bereich (+): strikte Zunahme von f , Bereich (-): strikte Abnahme von f ,
 ggf. Nullstellen x_0 von f' (stationäre Stellen von f) berechnen.

3 Extrempunktbestimmung

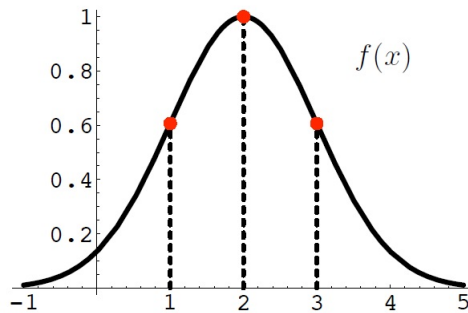
3-1 **Lokale Extrema** (falls es Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$ gibt):
 wenn $f''(x_0) < 0$, dann ist $(x_0, f(x_0))$ **lokaler Maximalpunkt**,
 wenn $f''(x_0) > 0$, dann ist $(x_0, f(x_0))$ **lokaler Minimalpunkt**,
 wenn $f''(x_0) = 0$, dann ist (zunächst) keine Entscheidung möglich.

3-2 Globale Extrema:

- (a) Vergleiche $f(a)$ und $f(b)$ und – falls es solche überhaupt gibt – lokale Extremwerte $f(x_0)$.
- (b) Im Falle $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$ gibt es **keine lokalen Extrema, nur a und b globale Extrema.**

Bsp. 4 $f(x) = (1+x) \ln(1+x)$, $D(f) = [0, 1000]$. Für alle $x \in [0, 1000]$ ist,
 $f'(x) = \ln(1+x) + 1 \geq \ln(1) + 1 = 1 > 0$, $f''(x) = (1+x)^{-1} > 0$.
 Also ist f strikt monoton wachsend, ohne Maximum,
 ohne lokale Extrema, globales Minimum ist $f(0) = \ln 1 = 0$.

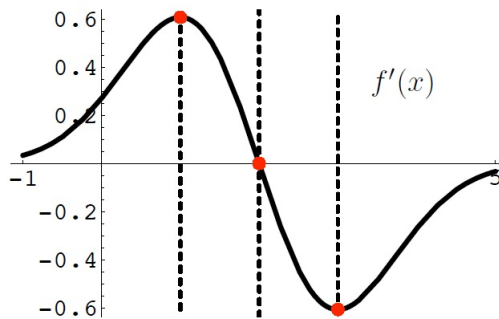
Bsp. 5 $f(x) = e^{-(x-2)^2/2}$, $D(f) = [-1, 5]$, $f'(x) = e^{-(x-2)^2/2} \cdot (2-x)$



$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-(x-2)^2/2}(2-x)^2 - e^{-(x-2)^2/2} \\ &= e^{-(x-2)^2/2}((2-x)^2 - 1) \end{aligned}$$

Vorzeichen der ersten Ableitung:
Da $e^z > 0$ für jedes z ist, bestimmt der Faktor $(2-x)$ das Vorzeichen von f' :

$$f'(x) = \begin{cases} > 0, & 2 > x, \text{ str. wachsend} \\ = 0, & 2 = x, \text{ Nullstelle} \\ < 0 & 2 < x, \text{ strikt fallend} \end{cases}$$



Lokale Extrema:

Da $f''(2) = -1 < 0$, ist $x = 2$ eine Max-Stelle mit Max-Wert $f(2) = 1$:
 $(2, 1)$ ist ein lokaler Max-Punkt.

Globale Extrema:

$$\begin{aligned} f(-1) &= e^{-9/2} < 1 && \leftarrow \text{globales Min.} \\ f(2) &= 1 && \leftarrow \text{globales Max.} \\ f(5) &= e^{-9/2} < 1 && \leftarrow \text{globales Min.} \end{aligned}$$

Elementare Integration

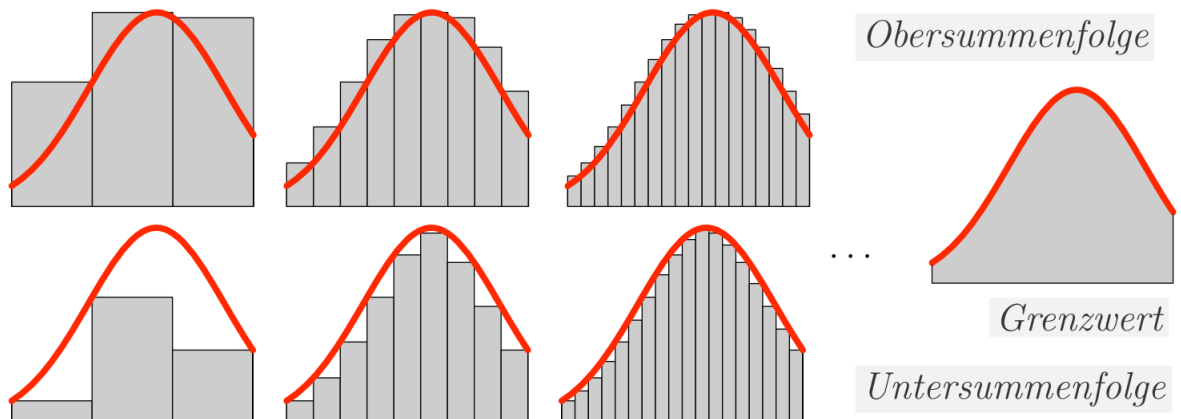
Wiederholung von Grundkenntnissen

53 Bestimmtes Integral (Bestimmtes Riemann-Integral)

Dies ist die einfachste und gleichzeitig für ökonomische Anwendungen wichtigste Form des Integralbegriffes.

Grob, *zur Erinnerung*: Auf gewissen Intervallunterteilungen/Zerlegungen von $[a, b]$ wird die Fläche mit „etwas zu kleiner“ (je mit den minimalen Funktionswerten) und „etwas zu großer“ (je mit den maximalen Funktionswerten) Rechteckstücken zwischen x -Achse und (positiver) Funktionskurve gemessen. Für jede Zerlegung ergibt sich eine „Untersumme“ und eine „Obersumme“ dieser Rechtecke. Bei einem erfolgreichen Grenzübergang bzgl. immer feineren Zerlegungen ergibt sich *eine* Zahl (die unter positiven Kurvenstücken die Fläche misst und nicht von der Wahl der Zerlegungsfolge abhängt).

Diese Zahl heißt dann (Riemann-)Integral von f über $[a, b]$ und die Funktion f heißt über $[a, b]$ (Riemann-)integrierbar



Schreibweise für den Zahlenwert eines Integrals über $[a, b]$: $\int_a^b f(t)dt$; dabei heißt t die **Integrationsvariable** und f der **Integrand**.

Wichtige Funktionstypen sind integrierbar:

über $[a, b]$ *stetige* Funktionen sind über $[a, b]$ integrierbar,

über $[a, b]$ *monotone*, beschränkte Funktionen sind über $[a, b]$ integrierbar.

Insbesondere sind also alle unsere Grundfunktionen (\triangleright Grundl. Nrn. 10/11/13) integrierbar. Zur konkreten Berechnung eines Integrals wird obige (leicht verständliche) Grenzwertmethode selten herangezogen. Andere Grenzübergänge (z.B. Stammfunktionen), die aber nicht immer verfügbar sind, lassen oft allgemeinere „formelmäßige“ Berechnungen zu.

*Obiges Integral ist ein Flächenstück unter $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}/\sqrt{2\pi}$ (früherer 10 DM-Schein)
 \triangleright Normalverteilung \triangleright Statistik*

In den meisten ökonomischen Anwendungen werden Sie Funktionen integrieren, die Zusammensetzungen unserer Grundfunktionen sind. Mithilfe von Rechenregeln lassen sich dann die Integrale zurückführen auf Integrale dieser Grundfunktionen. Von diesen weiß man, wie sie zu integrieren sind. Daher reicht es zu wissen, wie unsere Grundfunktionen integriert werden (\triangleright Nr. 56). Zunächst einige elementare Rechenregeln für das Integrieren.

54 Rechenregeln für bestimmte Integrale

$$(R1) \int_a^b (f(t) \pm g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt \pm \int_a^b g(t) dt$$

$$(R2) \int_a^b c \cdot f(t) dt = c \cdot \int_a^b f(t) dt \quad (c \in \mathbb{R} \text{ konstant})$$

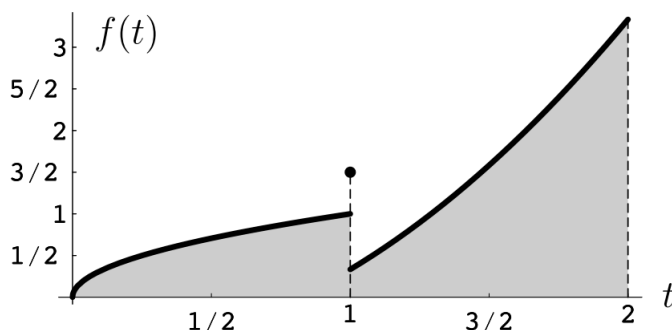
$$(R3) \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt, \text{ insbesondere } \int_a^a f(t) dt = 0$$

$$(R4) \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Regel 4 bedeutet insbesondere, daß **stückweise stetige Funktionen** (endlich viele Stücke) **entsprechend stückweise integriert** werden können. Die Funktionswerte an den „Nahtstellen“ sind dabei wegen $\int_a^a f(t) dt = 0$ ohne Bedeutung.

Bsp. 1

Gefragt: $\int_0^2 f(t) dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 3/2 & \text{für } t = 1 \\ t^2 - \frac{2}{3} & \text{für } 1 < t \leq 2 \end{cases}$



$\int_0^2 f(t) dt$ misst die Fläche zwischen der x -Achse und der positiven Funktionskurve $f(t)$

$$\int_0^2 f(t) dt \stackrel{(R3),(R4)}{=} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt + 0 + \int_1^2 \left(t^2 - \frac{2}{3}\right) dt \stackrel{(R1),(R2)}{=} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt + \int_1^2 t^2 dt - \frac{2}{3} \int_1^2 1 dt$$

(Bsp. wird fortgesetzt)

Ein wesentliches Hilfsmittel für Integralberechnungen beruht auf den Grenzwertbildungen $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} F'(x_0)$ für die Ableitung an der Stelle x_0 , approximativ: $F(x_1) - F(x_0) \approx (x_1 - x_0) \cdot F'(x_0)$, wenn $x_1 - x_0$ „klein“ ist. Wenn $F'(x_0) = f(x_0)$ ist, können also (in einer ersten Näherung) rechteckige Flächenstücke der Form Breite \times Höhe = $(x_1 - x_0)f(x_0)$ durch $F(x_1) - F(x_0)$ approximiert werden. Gesucht: Funktionen, deren Ableitung ein gegebener stetiger Integrand f ist. Ein wichtiges Ergebnis (\triangleright Nr. 57) besagt, dass sich für solche Funktionen die Berechnung eines bestimmten Integrals sehr vereinfacht.

55 Stammfunktionen

F heißt Stammfunktion zu einer Funktion f über $[a, b]$, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Mit F ist auch $F + c$, (c konstant), eine Stammfunktion. Die (bzgl. der Eigenschaft „Stammfunktion“ unbestimmte) Zahl c heißt *Integrationskonstante*.

56 Stammfunktionen zu Grundfunktionen

	Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$x > 0, r \in \mathbb{Q}, r \neq -1:$	x^r	$\frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + c$
$x > 0:$	x^{-1}	$\ln x + c$
$x > 0:$	$\ln x$	$x \cdot \ln x - x + c$
$x \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0:$	$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c$
<i>Inbesondere</i>		
$b > 0, b \neq 1:$	$\log_b(x) := \frac{\ln x}{\ln b}$	$\frac{1}{\ln b} (x \cdot \ln x - x) + c$
$b > 0, b \neq 1:$	$b^x := e^{x \ln b}$	$\frac{1}{\ln b} b^x + c$

Bsp. 2

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
1	$x + c$	$x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$	$\log_2(x)$	$\frac{1}{\ln 2} (x \ln x - x) + c$
x^1	$\frac{1}{2} x^2 + c$	x^2	$\frac{1}{3} x^3 + c$	$(\frac{1}{2})^x$	$\frac{1}{\ln 1/2} \cdot (\frac{1}{2})^x + c$

Leider haben manche wichtigen (sogar beliebig oft differenzierbare) Funktionen f keine wie in obiger Tabelle angebbare Stammfunktionen, sondern nur eine „Integral-Stammfunktion“ - siehe Gleichung (ISF) unten, z.B. die Dichte $f(x) = e^{-x^2/2} / \sqrt{2\pi}$ der Standardnormalverteilung (\triangleright Statistik)

Weitere *Sprechweisen* für Stammfunktionen F:

- Unbestimmtes „Integral“
- im Hinblick auf eine gewisse „Umkehrung“ der Differentiation:
 F ist eine (mögliche) „Aufleitung“ von f (und f die „Ableitung“ von F)

57 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist die Funktion f über einem Intervall $[a, b]$ **stetig** und ist F eine **Stammfunktion** zu f , dann gilt

$$\text{(HDIR)} \quad F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

Übersichtlich und nützlich für „lange“ Ausdrücke ist die Schreibweise:

$$[F(t)]_a^b := F(b) - F(a)$$

Konstante Summanden in einer Stammfunktion (Integrationskonstanten c) verschwinden dabei durch die Differenzbildung.

Bsp. 1 (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t) dt &= \int_0^1 t^{1/2} dt + \int_1^2 t^2 dt - \frac{2}{3} \int_1^2 1 dt \stackrel{\text{Bsp.2}}{=} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_1^2 - \frac{2}{3} [t]_1^2 \\ &= \frac{2}{3}(1 - 0) + \frac{1}{3}(8 - 1) - \frac{2}{3}(2 - 1) = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

58 Integral-Stammfunktion

Umgekehrt zu (HDIR) definiert für einen über $[a, b]$ **stetigen** Integranden f die Funktion

$$\text{(ISF)} \quad F(x) := F(a) + \int_a^x f(t) dt \quad \text{für } a \leq x \leq b$$

eine **Stammfunktion** von f (d.h. also $F'(x) = f(x)$ für $a \leq x \leq b$)

$F(a)$ ist hierbei die Festlegung für die Integrationskonstante, die sich für $x = a$ ergeben soll, und die meist eine inhaltliche (ökonomische) Bedeutung hat. Diese Festlegung (Schreibweise) ist dann auch in direkter Übereinstimmung mit (HDIR), d.h. $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt$.

Sind z.B. im Rahmen einer Marginalanalyse im Bereich $0 \leq t \leq b$ die Grenzkosten $f(t)$ der Ausgangspunkt, dann werden (für $0 \leq x \leq b$) durch $F(x) = F(0) + \int_0^x f(t) dt$ die Gesamtkosten dargestellt, durch $F(0)$ die Fixkosten und durch $F(x) - F(0) = \int_0^x f(t) dt$ die variablen Kosten.

Weitere Hilfsmittel zur Berechnung bestimmter Integrale

59 Lineare Substitutionsregel

Für $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p \neq 0$ gilt

$$\text{(SR)} \quad \int_a^b f(p \cdot t + q) dt = \begin{cases} -\frac{1}{p} \int_{(p \cdot b + q)}^{(p \cdot a + q)} f(z) dz & \text{für } p < 0 \\ \frac{1}{p} \int_{(p \cdot a + q)}^{(p \cdot b + q)} f(z) dz & \text{für } p > 0 \end{cases}$$

Bsp. 3a $\int_5^{77} (4+t)^{1/2} dt = ?$

$$\int_5^{77} (4+t)^{1/2} dt = \int_9^{81} z^{1/2} dz = \left[\frac{2}{3} z^{3/2} \right]_9^{81} = \left(\frac{2}{3} 9^3 - \frac{2}{3} 3^3 \right) = 468.$$

Bsp. 3b $\int_0^{\ln 4} e^{-t/2+1} dt = ?$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 4} e^{-t/2+1} dt &= 2 \int_{-\ln 2+1}^1 e^z dz = 2 [e^z]_{(-\ln 2+1)}^1 = 2(e^1 - e^{-\ln 2+1}) \\ &= 2e^1(1 - e^{-\ln 2}) = e^1 \end{aligned}$$

60 Uneigentliche (bestimmte) Integrale

Grenzwerte von Integralen

Für eine stetige Funktion können (aber müssen nicht) die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(t) dt &:= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt && \text{uneig. Integral von } f \text{ über } [a, \infty] \\ \int_{-\infty}^b f(t) dt &:= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(t) dt && \text{uneig. Integral von } f \text{ über } [-\infty, b] \end{aligned}$$

existieren. Ist $D(f) = \mathbb{R}$, so kann (aber muss nicht) der Grenzwert

$$\int_{-\infty}^\infty f(t) dt := \int_{-\infty}^d f(t) dt + \int_d^\infty f(t) dt \quad \text{uneig. Integral von } f \text{ über } \mathbb{R}$$

existieren, wobei d fix (die Wahl von d ändert den Grenzwert nicht)

Bsp. 4

($\lambda > 0$ fix) $\int_0^b \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^b = 1 - e^{-\lambda b} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 1 - 0$, also $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt = 1$. Anders ausge-

drückt: Die Integral-Stammfunktion ($F(0) = 0$) $F(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

erfüllt $F(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

Bsp. 5

Für $0 < a \leq b$ ist

$$\int_a^b t^{-r} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-r} [t^{1-r}]_a^b & \text{für } 0 < r, r \neq 1 \\ [\ln t]_a^b & \text{für } r = 1 \end{cases}$$

Mit $0 < a \rightarrow 0$ bzw. $b \rightarrow \infty$ ergibt sich für die rechts stehenden Ausdrücke:

$$\lim_{0 < a \rightarrow 0} \frac{1}{1-r} (b^{1-r} - a^{1-r}) = \begin{cases} \frac{1}{1-r} b^{1-r} & \text{für } 0 < r < 1 \\ \infty & \text{für } r > 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim_{0 < a \rightarrow 0} (\ln b - \ln a) = \infty$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-r} (b^{1-r} - a^{1-r}) = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < r < 1 \\ \frac{1}{r-1} a^{1-r} & \text{für } r > 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln a) = \infty$$

Die Grenzwertbildung wird wiederum typografisch in die Integrationsgrenze übernommen, z.B. wenn ($a \rightarrow 0$ und $b = 1$) bzw. ($a = 1$ und $b \rightarrow \infty$):

61

$$\int_0^1 t^{-r} dt := \lim_{0 < a \rightarrow 0} \int_a^1 t^{-r} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & , 0 < r < 1 \\ \infty & , r \geq 1 \end{cases}$$

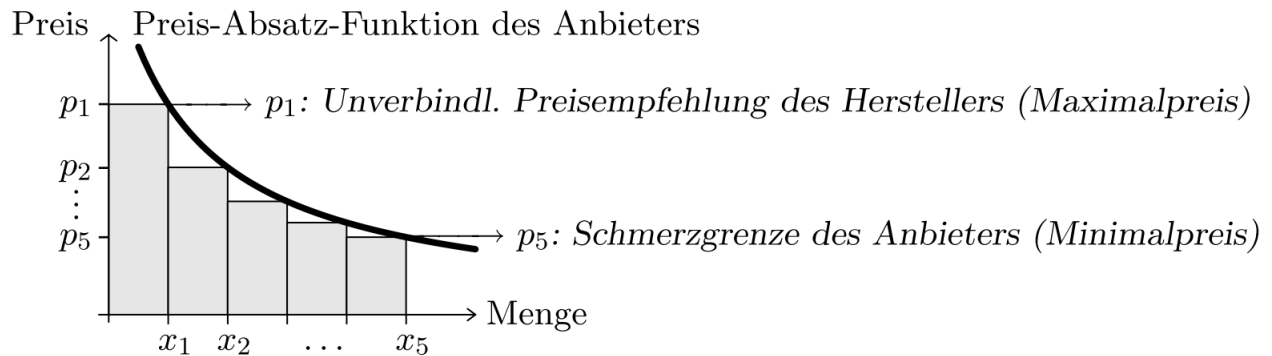
$$\int_1^\infty t^{-r} dt := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b t^{-r} dt = \begin{cases} \infty & , 0 < r \leq 1 \\ \frac{1}{r-1} & , r > 1 \end{cases}$$

z.B. also $\int_0^1 t^{-1/2} dt = 2$ und $\int_0^1 t^{-1} dt = \infty = \int_1^\infty t^{-1} dt$ und $\int_1^\infty t^{-3/2} dt = 2$

(Vereinfachte) Ökonomische Anwendungsbeispiele

Bsp. 6 Beispiel für eine Untersumme: Preisdifferenzierung eines Anbieters

(z.B. über Mengenrabatte oder „Billigzugaben“)

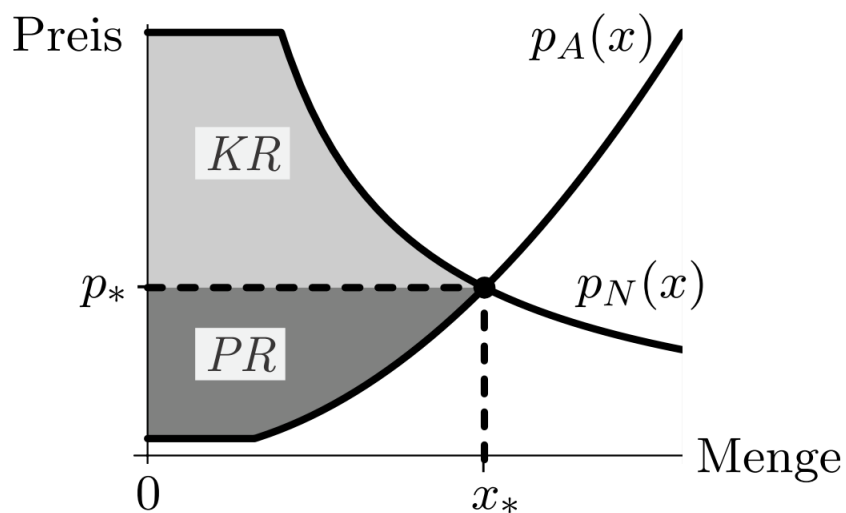


Die Rechteck-Flächen (je Preis \times Menge) beschreiben den bei Preisdifferenzierung insgesamt erreichbaren Erlös: $p_1 \cdot x_1 + p_2(x_2 - x_1) + \dots + p_5(x_5 - x_4)$

Verfeinerte Untersummen (idealisiert durch den Grenzwert: das Integral), ergeben sich bei Aggregation:

Bsp. 7 Interpretation von Flächen: **Konsumenten-/Produzentenrente**

In einem Marktmodell für ein Gut sind eine (monoton fallende) Nachfragefunktion $p_N(x)$ und eine (monoton wachsende) Angebotsfunktion $p_A(x)$ gegeben, die beschreiben, welchen (Stück-)Preis $p_N(x)$ die aggregierte Nachfrage x zu zahlen bereit ist und zu welchem kalkuliertem (Stück-)Preis $p_A(x)$ das aggregierte Angebot x gemacht wird. Preise und Mengen werden idealisierend als beliebig (genügend oft) teilbar angenommen. Die Schnittpunktbedingung $p_A(x) = p_N(x)$ ergibt den Gleichgewichtspunkt (x_*, p_*) für dieses Gut. Der „Profitbereich“ der Nachfrage (der durch $E_* = p_* \cdot x_*$ nicht abgeschöpfte mögliche Erlös bei Nachfragern mit höherer Preisbereitschaft als p_*) heißt *Konsumentenrente*, der „Profitbereich“ des Angebots (der als Teil des Gesamterlöses $E_* = p_* \cdot x_*$ zusätzlich abgeschöpfte Erlös von Anbietern mit niedrigerer Preiskalkulation als p_*) heißt *Produzentenrente*.



- Gleichgewichtspunkt (x_*, p_*) mit dem (Markt-)Erlös $E_* = p_* \cdot x_*$
- Konsumentenrente bei (x_*, p_*) : $KR = \int_0^{x_*} p_N(t) dt - p_* \cdot x_*$
- Produzentenrente bei (x_*, p_*) : $PR = p_* \cdot x_* - \int_0^{x_*} p_A(t) dt$

Partielle und totale Betrachtungsweisen

Partielle Betrachtungsweise

erfassen **Einzeleffekte einer Variable**, wenn jeweils alle anderen Variablen in ihrem Wert fixiert bleiben (als *konstant* betrachtet werden: „ceteris paribus“)

Die Berechnung partieller Ableitungen und partieller Elastizitäten sind also uns wohlbekannte eindimensionale Methoden, die nur noch sauber erkennbar symbolisiert werden müssen.

Es wird unten stets vorausgesetzt, dass die vorkommenden Grenzwerte existieren. (Dies muss nicht so sein, wird bei ökonomischen Anwendungen aber fast immer/in der Regel doch der Fall sein.)

62 Partielle Funktionen, Partielle Ableitungen

Aus Gründen der „Übersichtlichkeit“ verwenden wir hier nur zwei Variablen. Eine Zeit lang werden die bei partieller Betrachtung als konstant betrachteten Argumente unterstrichen.

Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $x, y, f(x, y) \in \mathbb{R}$ (meist $x, y > 0$)

Partielle Funktionen *Im Index symbolisch die partiell betrachtete Variable*

$$\begin{aligned} f_x(x, \underline{y}) &:= f(x, \underline{y}) && \text{mit } x, f(x, \underline{y}) \in \mathbb{R} \text{ und } \underline{y} \in \mathbb{R} \text{ fix} \\ f_y(\underline{x}, y) &:= f(\underline{x}, y) && \text{mit } f(\underline{x}, y), y \in \mathbb{R} \text{ und } \underline{x} \in \mathbb{R} \text{ fix} \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen *Im Index symbolisch die partiell betrachtete Variable*

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, \underline{y}) &:= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f_x(x_1, \underline{y}) - f_x(x_0, \underline{y})}{x_1 - x_0}, && \text{wobei } \underline{y} \in \mathbb{R} \text{ fix} \\ f'_y(\underline{x}, y_0) &:= \lim_{y_1 \rightarrow y_0} \frac{f_y(\underline{x}, y_1) - f_y(\underline{x}, y_0)}{y_1 - y_0}, && \text{und } \underline{x} \in \mathbb{R} \text{ fix} \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Grenzwertbildungen werden - genau wie bei Funktionen einer Variablen - partielle Marginalanalysen aufgebaut (\triangleright Nr.65)

Das Ergebnis der partiellen Differentiation einer Funktion mehrerer Variablen ist wiederum eine Funktion dieser mehreren Variablen: die jeweils anderen Variablen werden *nur für die Bildung der partiellen Ableitung fixiert und stehen danach wieder als Variable zur Verfügung*. Der obige Vorgang der Bildung partieller Funktionen und deren Ableitung kann also - für

jede dieser Variablen (auch für die jeweils anderen) - erneut auf diese partiellen Ableitungen angewendet werden:

63 Partielle Ableitungen zweiter Ordnung

höhere Ordnungen analog

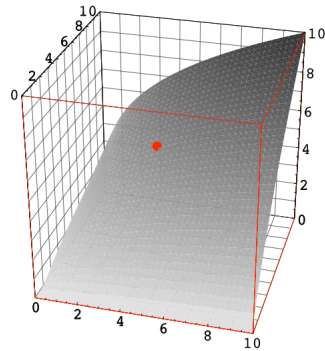
$$f''_{xx}(x_0, y) := (f'_x)'_x(x_0, y)$$

$$f''_{xy}(\underline{x}, y_0) := (f'_x)'_y(\underline{x}, y_0)$$

$$f''_{yx}(x_0, \underline{y}) := (f'_y)'_x(x_0, \underline{y})$$

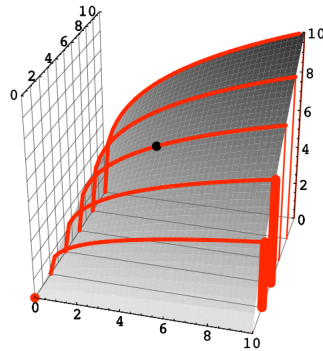
$$f''_{yy}(\underline{x}, y_0) := (f'_y)'_y(\underline{x}, y_0)$$

Bsp. 1 Interessierender Bereich: $x > 0$ und $y > 0$



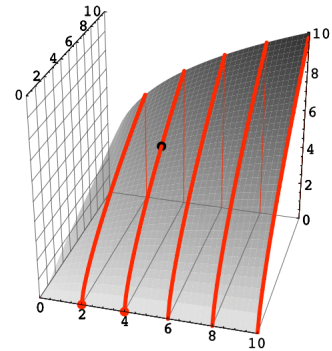
$$f(x, y) = x^{1/3} \cdot y^{2/3}$$

$$f(4, 6) \approx 5.24$$



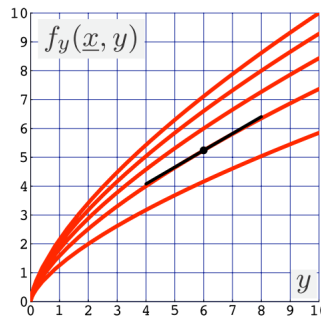
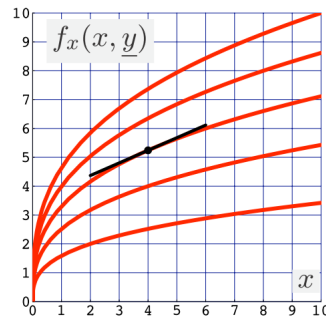
$$f_x(x, y) = x^{1/3} \cdot \underline{y}^{2/3}$$

$$\text{für } \underline{y} \in \{2, 4, 6, 8\}$$



$$f_y(\underline{x}, y) = \underline{x}^{1/3} \cdot y^{2/3}$$

$$\text{für } \underline{x} \in \{2, 4, 6, 8\}$$



$$f'_x(x, y) = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} \cdot y^{2/3}$$

$$f'_x(4, 6) \approx 0.44$$

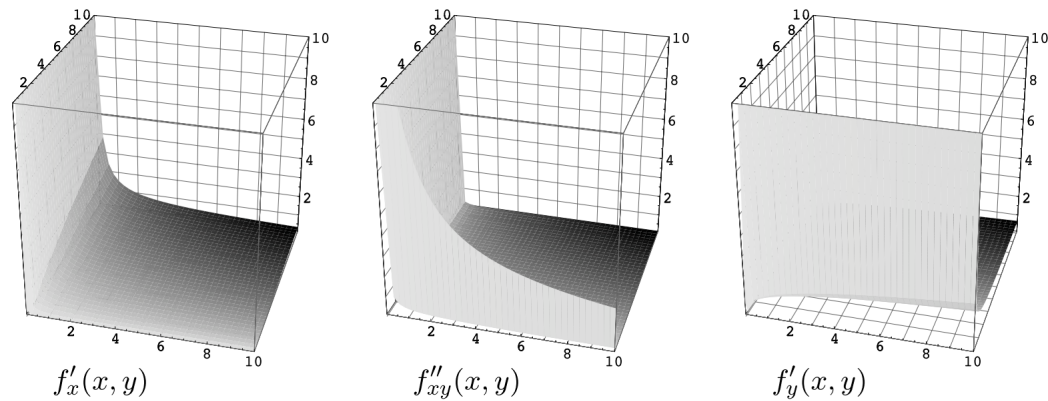
$$f'_y(x, y) = \frac{2}{3} \cdot x^{1/3} \cdot y^{-1/3}$$

$$f'_y(4, 6) \approx 0.58$$

$$f''_{xx}(x, y) = -\frac{2}{9} x^{-5/3} y^{2/3}$$

$$f''_{yy}(x, y) = -\frac{2}{9} x^{1/3} y^{-4/3}$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{2}{9} x^{-2/3} y^{-1/3} = f''_{yx}(x, y)$$



- $f(x, y)$ ist eine 3D-Funktion
- $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ sind beide Funktionen einer Variablen (2D-Funktionen)
- Die beiden partiellen Ableitungen f'_x und f'_y werden per Aufhebung der Fixierung der anderen Variable, nach dem Ableitungsvorgang, wieder 3D-Funktionen
- Zur Gleichheit $f''_{xy} = f''_{yx}$ siehe Nr. 71

Die Schreibweise f_x bzw. f_y symbolisiert die ceteris-paribus-Denkweise/Argumentation ausgehend von der Stelle (x_0, y_0)

Bei der sogenannten *partiellen Marginalanalyse* geht es um das marginale Änderungsverhalten einer (ökonomischen) Funktion f bei marginaler ceteris paribus Änderung einer (ökonomischen) Einflußgröße. Mathematisch bedeutet dies bei einer Funktion f mit 2 Variablen nichts anderes als eine Marginalanalyse der partiellen Funktionen f_x und f_y . Die Begriffe der Tangenten, und Elastizitäten übertragen sich unmittelbar, die Interpretation ist unverändert (wie bei Funktionen einer Variable).

▷ Vergleiche nun und betrachte Nrn. 46a, 49a, 62

64 Partielle Tangenten, partielle Elastizitäten

- Partielle Tangenten (Tangenten an f_x bzw. f_y)

$$\left(T_{(x_0, y_0)}^f\right)_x(x, \underline{y_0}) := f_x(x, \underline{y_0}) + f'_x(x, \underline{y_0}) \cdot (x - x_0)$$

$$\left(T_{(x_0, y_0)}^f\right)_y(\underline{x_0}, y) := f_y(\underline{x_0}, y) + f'_y(\underline{x_0}, y) \cdot (y - y_0)$$

d.h.: $T_x^f \approx f_x + f'_x \cdot dx$ und $T_y^f \approx f_y + f'_y$ an der Stelle (x_0, y_0) mit $dx \approx x - x_0$ und $dy \approx y - y_0$

- Partielle Elastizitäten (Elastizität von f_x bzw. f_y)

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, \underline{y_0}) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0, \underline{y_0})}{f_x(x_0, \underline{y_0})} \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_y^f(\underline{x_0}, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(\underline{x_0}, y_0)}{f_y(\underline{x_0}, y_0)}$$

$$\text{kurz: } \mathcal{E}_x^f = x_0 \cdot \frac{f'_x}{f_x} \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_y^f = y_0 \cdot \frac{f'_y}{f_y}$$

Die Werte partieller Ableitungen und Elastizitäten tauchen ganz entsprechend Funktionen mit einer Variablen als Proportionalitätsfaktoren [▷ Nrn. 46a, 49a] bei den Näherungsansätzen auf. Für die partielle Funktion f_y wird dies - zur Übung der Kurzschreibweise - nochmals aufgeschrieben. Für f_x ergibt sich dies analog.

Bezeichnungen ab der folgenden Übersicht, sofern nichts anderes vermerkt:

- $(x_0, y_0) = (x_{alt}, y_{alt})$ Basisstelle = Ausgangspunkt der Marginalanalyse
- $dx \approx x_1 - x_0$ bzw. $dy \approx y_1 - y_0$ Abweichungen der Variablen
- $x_1 = x_{neu}$ bzw. $y_1 = y_{neu}$ abweichende Werte der betrachteten Variablen
- $df_x \approx f_x(x_1, \underline{y_0}) - f_x(x_0, \underline{y_0})$ bzw. $df_y \approx f_y(\underline{x_0}, y_1) - f_y(\underline{x_0}, y_0)$ Abweichungen der Funktionswerte

Wie bei Nrn. 42a, 49a führen einfache Umformungen zu folgenden Näherungen

ÜBERSICHT Alle Nenner werden als $\neq 0$ vorausgesetzt!

65 Näherung für Partielle absolute und relative Änderungen von f

Aussageziel bzgl. $f_y(\underline{x}_0, y)$	\approx	Proportion'faktor	\cdot	Aussagebasis bzgl. y
absolute Änderung		Ableitung von f_y		absolute Änderung
1 df_y	\approx	f'_y	\cdot	dy
relative Änderung		Elastizität von f_y		relative Änderung
2 df_y/f_y	\approx	$y_0 \cdot f'_y/f_y$	\cdot	dy/y_0

Analoge Näherungen gelten für f_x , z.B. wird Näherung (2) zu:

$$df_x/f_x \approx (x_0 \cdot f'_x/f_x) \cdot (dx/x_0)$$

Mathematisch korrekt (für unsere Zwecke aber auf Dauer zu aufwendig oder unnötig weitere Symbole erfordernd) müsste z.B. die Näherung (1) so lauten: $f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0) \approx df_y = f'_y \cdot dy \approx f'_y \cdot (y - y_0)$. Die Verwendung von \approx statt $=$ in der Mitte soll also (in der Übersicht) abkürzend die Verwendung der beiden äußeren Näherungen symbolisieren.

Bsp. 2 Interessierende Funktion: $h(x, y) = (1 + x) \cdot y \cdot e^{y-x}$, $(x, y > 0)$

$$h'_x(x, y) = y(e^{y-x} + (1+x)e^{y-x}(-1)) = -xye^{y-x}$$

$$h'_y(x, y) = (1+x)(e^{y-x} + ye^{y-x} \cdot 1) = (1+x)(1+y)e^{y-x}$$

$$\mathcal{E}_x^h(x, y) = \frac{-xye^{y-x}}{(1+x)ye^{y-x}} \cdot x = -\frac{x^2}{1+x}$$

$$\mathcal{E}_y^h(x, y) = \frac{(1+x)(1+y)e^{y-x}}{(1+x)ye^{y-x}} \cdot y = 1 + y$$

Zahlenbeispiel: $(x_0, y_0) = (4, 10)$, $x_1 = 4.08$, $y_1 = 10.05$, d.h. $dx \approx 0.08$, $dy \approx 0.05$ bzw. Erhöhung von $x_0 = 2\% \approx dx/x_0$, Erhöhung von $y_0 = 0.5\% \approx dy/y_0$. Abkürzungen:

$$dh_x \approx h_x(4.08, \underline{10}) - h_x(4, \underline{10}) \text{ und } dh_y \approx h_y(\underline{4}, 10.05) - h_y(\underline{4}, 10)$$

$$dh_x/h_x \approx \frac{h_x(4.08, \underline{10}) - h_x(4, \underline{10})}{h_x(4, \underline{10})} \text{ und } dh_y/h_y \approx \frac{h_y(\underline{4}, 10.05) - h_y(\underline{4}, 10)}{h_y(\underline{4}, 10)}$$

Je nach gegebener Aussagebasis und interessierendem Aussageziel, wobei $h_x, h'_x, \mathcal{E}_x^h$ bzw. $h_y, h'_y, \mathcal{E}_y^h$ für $(x_0 = 4, y_0 = 10)$ ausgewertet werden, ergibt sich:

$$(1a) \quad dh_x \approx h'_x \cdot dx \approx (-4 \cdot 10 \cdot e^{10-4}) \cdot (0.08) = -3.2 \cdot e^6 \text{ (eher seltend interessant)}$$

$$(2a) \quad dh_x/h_x \approx \mathcal{E}_x^h \cdot (dx/x_0) \approx \left(-\frac{4^2}{1+4}\right) \cdot (+2\%) = -6.4\% \text{ (eher oft interessant)}$$

$$(1b) \quad dh_y \approx h'_y \cdot dy \approx ((1+4)(1+10)e^{10-4}) \cdot (0.05) = 2.75 \cdot e^6 \text{ (seltend interessant)}$$

$$(2b) \quad dh_y/h_y \approx \mathcal{E}_y^h \cdot (dy/y_0) \approx (1+10) \cdot (+0.5\%) = +5.5\% \text{ (eher oft interessant)}$$

Zum Vergleich die „genauen“/genaueren Werte: $h(4, 10) = 50e^6 = 20171.4$

$$\begin{aligned} h(4.08, 10) - h(4, 10) &= -1252.9, & h(4, 10.05) - h(4, 10) &= 1140.2 \\ \frac{h(4.08, 10) - h(4, 10)}{h(4, 10)} &= -6.21\%, & \frac{h(4, 10.05) - h(4, 10)}{h(4, 10)} &= 5.65\% \end{aligned}$$

Totale Betrachtungsweise - Addition der partiellen Effekte

66 Totales Differential und Tangentialebene

▷ Nr. 64

- **Totales Differential** an der Stelle (x_0, y_0)

$$df_{(x_0, y_0)}(dx, dy) := f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy$$

Addition der partiellen marginalen Änderungseffekte der beiden Variablen, kurz:

$$df = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy = df_x + df_y$$

- **Tangentialebene** an der Stelle (x_0, y_0)

$$T_{(x_0, y_0)}^f(x, y) := f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Die 3D-Tangente ist eine Ebene, die f im 3D-Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ in beide (Variablen-),Richtungen“ tangiert, mit den partiellen Tangenten an f_x bzw. f_y als „Richtungsachsen“.

Bei einer Variable wird die (lineare) Näherung $f(x) \approx f(x_0) + f'_{x_0} \cdot (x - x_0)$ durch die rechts stehende Tangentengleichung verwendet. Bei zwei Variablen wird entsprechend mit der Tangentialebene approximiert, wobei die beiden Abweichungen $x - x_0$ und $y - y_0$ „nahe bei Null“ sein sollen:

$$\triangleright f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Mit der grenzwertigen Schreibweise $df \approx f(x, y) - f(x_0, y_0)$ und $dx \approx x - x_0$ und $dy \approx y - y_0$ liest sich dies (▷ Nrn. 65, 66) als $df \approx f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$

ÜBERSICHT

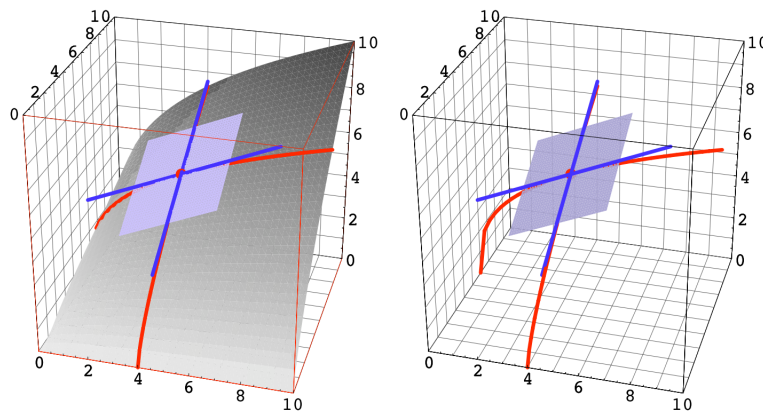
Alle Nenner werden als $\neq 0$ vorausgesetzt!

67 Näherung für Totale absolute und relative Änderungen von f

Aussageziel bzgl. $f(x, y)$		\approx	x -Proportionalfaktor	\cdot	Aussagebasis bzgl. x
			+	y -Proportionalfaktor	\cdot Aussagebasis bzgl. y
1	absolute Änderung df	\approx	Partielle Ableitungen		absolute Änderungen
			$f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$		
2	relative Änderung df/f	\approx	Partielle Elastizitäten		relative Änderungen
			$(x_0 \cdot f'_x/f) \cdot (dx/x_0) + (y_0 \cdot f'_y/f) \cdot (dy/y_0)$		

Bsp. 1 (Fortsetzung)

$$f(x, y) = x^{1/3} \cdot y^{2/3}$$



Ein Stück der Tangentialebene T^f und der partiellen Tangenten T_x^f und T_y^f an der Stelle $(4, 6)$.

$$T_x^f(x, y) = f(4, 6) + f'_x(4, 6) \cdot (x - 4)$$

$$T_y^f(x, y) = f(4, 6) + f'_y(4, 6) \cdot (y - 6)$$

$$T_{(4,6)}^f(x, y) = f(4, 6) + f'_x(4, 6) \cdot (x - 4) + f'_y(4, 6) \cdot (y - 6)$$

Bsp. 2 (Fortsetzung)

Basisstelle $(x_0, y_0) = (4, 10)$, die partiellen Effekte des Zahlenbeispiels übernehmen wir (ausgerechnet) von dort.

$$(1) \quad dh \approx h'_x \cdot dx + h'_y \cdot dy = (-4 \cdot 10e^{10-4}) \cdot dx + ((1+4)(1+10)e^{10-4}) \cdot dy \\ = e^6(-40 \cdot dx + 55 \cdot dy) \underset{\text{Zahlenbsp.}}{\approx} e^6(-3.2 + 2.75) = -0.45e^6$$

$$(2) \quad dh/h \approx (x \cdot h'_x/h) \cdot (dx/x) + (y \cdot h'_y/h) \cdot (dy/y) \\ = \left(-\frac{4^2}{1+4} \right) \cdot dx + (1+10) \cdot dy \\ = -3.2 \cdot (dx/x) + 1.1 \cdot (dy/y) \underset{\text{Zahlenbsp.}}{\approx} -6.4\% + 5.5\% = -0.9\%$$

Tangentialebene:

$$T_{(4,10)}^h(x, y) = 50e^6 - 40e^6(x-4) + 55e^6(y-10) \\ = 5e^6(10 - 8(x-4) + 11(y-10))$$

Z.B. ist $f(4.08, 10.05) \approx T^h(4.08, 10.05) = 49.55 \cdot e^6$, bei vergleichsweise exaktem Wert $(1+4.08) \cdot 10.05 \cdot e^6 = 51.054 \cdot e^6$

Das totale Differential $df_{(x_0, y_0)}$ einer Funktion f an einer Stelle (x_0, y_0) (\triangleright Nr. 66) kann streng genommen nur gebildet werden, wenn die Funktion f an der Stelle (x_0, y_0) *total differenzierbar* ist. Dies ist eine Eigenschaft, welche die bloße Existenz von partiellen Ableitungen in (x_0, y_0) **verschärft**. Wir werden darauf nicht weiter eingehen, da bei fast allen ökonomischen Anwendungen Funktionen mit mehreren Variablen vorkommen, deren partiellen Ableitungen **zusätzlich** (*total*) *stetig* (\triangleright Nr. 69) sind. Dann kann das folgende bekannte Faktum ausgenutzt werden

f besitzt partielle Ableitungen f'_x, f'_y und f'_x, f'_y sind total stetig an der Stelle (x_0, y_0)
 $\Rightarrow f$ ist total differenzierbar an der Stelle (x_0, y_0)

68 Grenzwert einer Funktion f in (x_0, y_0) $(x_0, y_0) \in D(f)$

Die Zahlen x_0 und y_0 sollen jeweils als Grenzwerte erreichbar durch Zahlenfolgen $x_n, n \in \mathbb{N}$ bzw. $y_n, n \in \mathbb{N}$, für die (für alle $n \in \mathbb{N}$) $(x_n, y_n) \in D(f)$ und $x_n \neq x_0$ bzw. $y_n \neq y_0$ gilt.

Eine Zahl c heißt Grenzwert der Funktion f an der Stelle (x_0, y_0) , wenn für JEDES Paar von Folgen $(x_n, n \in \mathbb{N})$ und $(y_n, n \in \mathbb{N})$ mit $(x_n, y_n) \in D(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$ bzw. $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y_0$ gilt: $f(x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c$.

Schreibweisen GW $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = c$ oder $f(x, y) \rightarrow c$ für $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$

69 (Totale) Stetigkeit einer Funktion f $(x_0, y_0) \in D(f)$

Die Funktion heißt (total) stetig an der Stelle (x_0, y_0) , falls gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \text{ existiert und } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Ist f an jeder Stelle $(x_0, y_0) \in D(f)$ (total) stetig, so heißt f (total) stetig.

70 Die Funktion $f(x, y)$ ist automatisch (total) stetig, falls Sie sich in einer der folgenden Weisen schreiben lässt

$$f(x, y) = f_1(x) + f_2(y) \quad \text{oder} \quad f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Hierbei bezeichnen $f_1(x)$ und $f_2(y)$ irgendwelche stetigen Funktionen mit einer Variablen, z.B. eine der Grundfunktionen $|x|, x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$), $e^x, \ln x$.

Sind $f_1(x)$ und $f_2(y)$ sogar differenzierbar (z.B. eine der Grundfunktionen $|x|, x^r$ ($r \in \mathbb{Q}$), $e^x, \ln x$), so ist $f(x, y)$ total differenzierbar.

Fast alle der in ökonomischen Anwendungen vorkommenden Funktionen mit zwei Variablen und ihre partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung lassen sich (evtl. in verketteter Form) auf eine der obigen Weisen darstellen.

Nach Nr. 70 dürfen Sie folgende (zeitsparende und umrechnungsfreundliche) Vertauschbar-

keitsregel „praktisch immer“ verwenden:

71 Vertauschbarkeit der Reihenfolge mehrfacher partieller Ableitung

Sind zwei partielle Ableitungen $f''_{x_i x_j}$ und f''_{x_j, x_i} nach dem Variablen x_i und x_j einer Funktion f (total) stetig, so gilt

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j, x_i}.$$

So z.B. auch (bei Variablen x, y, z)

$$f''_{xy} = f''_{yx}; \quad f''_{xz} = f''_{zx}; \quad f''_{yz} = f''_{zy}$$

und z.B. auch

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx} \text{ usw.}$$

3D-Extrema

Funktionen zweier Variabler: Extremwertbestimmung

72 SCHEMA für zweifach (total) differenzierbare Funktionen $f(x, y)$

73 Ständige Annahmen an Funktion f und Variablenbereich $D(f)$

1) Variablenbereich $D(f)$: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$a < x < b \quad (-\infty \leq a < b \leq \infty) \quad \text{und} \quad c < y < d \quad (-\infty \leq c < d \leq \infty)$$

2) f besitzt (total) stetige partielle Ableitungen $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ zweiter Ordnung

- 1) Berechne die beiden partiellen Ableitungen $f'_x(x, y)$ und $f'_y(x, y)$ und löse das (meist nicht-lineare) Gleichungssystem ▷ Thema 2

$$(*) \begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

d.h. suche *alle* Punkte (x_0, y_0) , die $f'_x(x, y) = 0$ und $f'_y(x, y) = 0$ erfüllen
[und im Definitionsbereich von f liegen].

- 2) Entscheidungsregel:

- a) Es gibt *keine* Lösungen (x_0, y_0) von (*):
Dann hat f keine (lokalen) Extrema/Extremalstellen → **Abbruch**
- b) Es gibt Lösungen (x_0, y_0) von (*):
Diese heißen dann **stationäre Punkte** und sind *mögliche* Extremalstellen

- 3) Berechne die zweite partiellen Ableitungen $f''_{xx}(x, y), f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y), f''_{yy}(x, y)$ und damit die sog. **Hesse-Determinante**

$$H_D(x_0, y_0) := f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$$

für jeden der oben ermittelten stationären Punkte (x_0, y_0) .

Abhängig von der konkreten Funktion f und den stationären Punkten

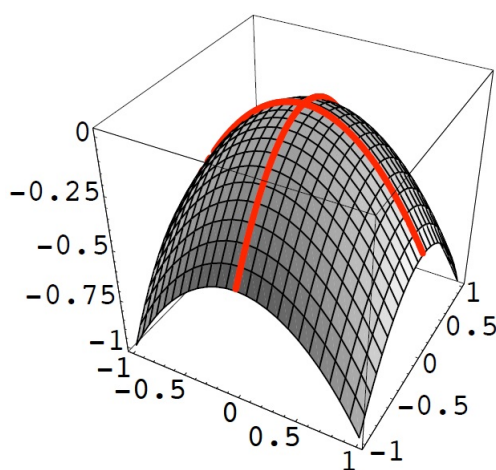
- ist es manchmal einfacher, $H_D(x, y)$ einmal allgemein auszurechnen (und umzuformen) und dann jeweils (x_0, y_0) einzusetzen
- und manchmal ist es einfacher, jeweils (x_0, y_0) zunächst in die partiellen Ableitungen einzusetzen und dann $H_D(x_0, y_0)$ auszurechnen

4 Entscheidungsregeln für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) :

- a $H_D(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow$ keine Entscheidung möglich
 \rightarrow *Abbruch*, verfeinerte Methoden erforderlich;
- b $H_D(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow f''_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$, (x_0, y_0) ist lokale Extremstelle:
 - $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ ist **lokale Minimalstelle** von f
 - $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ ist **lokale Maximalstelle** von f
- c $H_D(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ ist **Sattelpunkt** von f

5 Bestimme den jeweiligen Funktionswert $f(x_0, y_0)$, d.h den **Extremwert** (Minimalwert/Maximalwert) $f(x_0, y_0)$ zur Extremstelle (x_0, y_0) bzw. den **Sattelpunktswert** $f(x_0, y_0)$ zur Sattelpunktstelle (x_0, y_0) .

Beispiele



1. Einfaches Maximum $f(x, y) = -\frac{x^2+y^2}{2}$

$$f'_x(x, y) = -x, f'_y(x, y) = -y;$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x = 0 \\ -y = 0 \end{cases},$$

also einziger stationärer Punkt: $(0, 0)$;

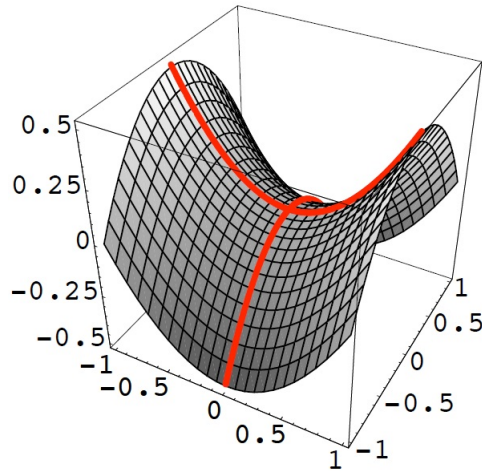
$$f''_{xx}(x, y) = -1, f''_{yy}(x, y) = -1,$$

$$f''_{xy}(x, y) = 0 = f''_{yx}(x, y);$$

$$H_D(0, 0) = (-1) \cdot (-1) - 0^2 = 1 > 0$$

$$\text{und } f''_{xx}(0, 0) = -1 < 0$$

$\Rightarrow (0, 0)$ ist (lokale) Maximalstelle, Maximalwert: $f(0, 0) = 0$



2. Normalsattel $f(x, y) = (x^2 - y^2)/2$

$$f'_x(x, y) = x, f'_y(x, y) = -y;$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ -y = 0 \end{cases},$$

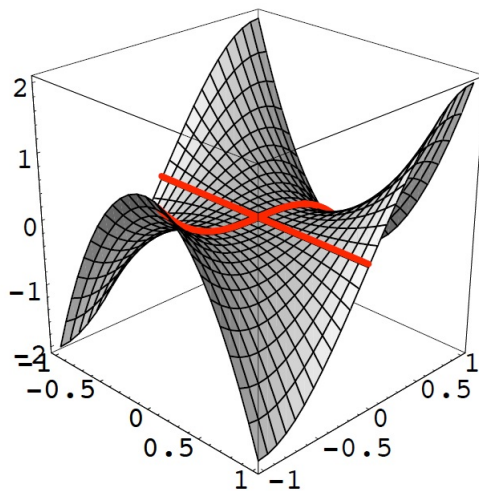
also einziger stationärer Punkt: $(0, 0)$;

$$f''_{xx}(x, y) = 1, f''_{yy}(x, y) = -1,$$

$$f''_{xy}(x, y) = 0 = f''_{yx}(x, y);$$

$$H_D(0, 0) = 1 \cdot (-1) - 0^2 = -1 < 0$$

$\Rightarrow (0, 0)$ ist Sattelpunktstelle, Sattelpunktwert: $f(0, 0) = 0$



3. Affensattel $f(x, y) = y(3x^2 - y^2)$

$$f'_x(x, y) = 6xy, f'_y(x, y) = 3x^2 - 3y^2;$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 0 \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ und } x^2 = y^2 \\ \text{oder} \\ y = 0 \text{ und } x^2 = y^2 \end{array} \right\},$$

also einziger stationärer Punkt: $(0, 0)$;

$$f''_{xx}(x, y) = 6y, f''_{yy}(x, y) = -6y,$$

$$f''_{xy}(x, y) = 6x = f''_{yx}(x, y);$$

$$H_D(0, 0) = 0 \cdot 0 - 0^2 = 0$$

$\Rightarrow (0, 0)$ keine Entscheidung möglich

Wir betrachten die als (lokale) Extremwert-/Sattelpunktstellen überhaupt in Frage kommenden stationären Stellen (x_0, y_0) mit $f'_x(x_0, y_0) = 0 = f'_y(x_0, y_0)$:

73a Durch das Schema entscheidbare Konstellationen

Fall 1: $H_D(x_0, y_0) > 0$, d.h. $(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 < f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0)$:

Lokales Extremum von f an der Stelle (x_0, y_0) , d.h. ▷ Bsp. 1

für alle Stellen (x, y) aus einem gewissen „Umfeld“ von (x_0, y_0) gilt:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \text{ (lok. MAX) bzw. } f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \text{ (lok. MIN)}$$

Mögliche Konstellationen für die partiellen Funktionen sind dann:

$f''_{xx}(x_0, y_0)$	und	$f''_{yy}(x_0, y_0)$	
> 0		> 0	lokales Minimum von f_x, f_y (und f)
< 0		< 0	lokales Maximum von f_x, f_y (und f)

Fall 2: $H_D(x_0, y_0) < 0$, d.h. $(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0)$:

Sattelpunkt von f an der Stelle (x_0, y_0) , d.h. ▷ Bsp. 2

(x_0, y_0) ist zwar stationärer Punkt (waagerechte Tangenten der partiellen Funktionen), aber in jedem „Umfeld“ von (x_0, y_0) sind weder alle Funktionswerte höchstens $f(x_0, y_0)$ [Maximaleigenschaft durch $f(x_0, y_0)$ nicht erfüllt] noch alle Funktionswerte mindestens $f(x_0, y_0)$ [Minimaleigenschaft durch $f(x_0, y_0)$ nicht erfüllt].

Einzig mögliche Konstellationen für die partiellen Funktionen:

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) \neq 0 \text{ (d.h. beide } \neq 0 \text{):}$$

lokales Minimum/Maximum von f_x, f_y insbesondere:

ein partielles Maximum trifft auf ein partielles Minimum

$$f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) = 0 \text{ (d.h. } f''_{xx} = 0 \text{ und/oder } f''_{yy} = 0 \text{):}$$

möglicher Wendepunkt (mit waager. Tangente) von f_x und/oder f_y

73b Durch das Schema nicht entscheidbare Konstellationen

Fall 3: $H_D(x_0, y_0) = 0$, d.h. $(f''_{xy}(x_0, y_0))^2 = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0)$:

Mögliche Konstellationen für die partiellen Funktionen: ▷ Bsp. 3

Wie in Fall (2)!!

VORSICHT

[Der Hauptzweck obiger Ausführungen]: Schließen Sie **nicht umgekehrt** von partiellen Extremwertüberlegungen (bzgl. f_x und f_y , also „ceteris paribus“) auf Extremwerte der zweifach (und damit von Wechselwirkungen zwischen x und y) abhängigen Funktion $f(x, y)$.

(3D-)Extrema unter Nebenbedingungen

Wir beschränken uns wieder (meistens) auf Funktionen von zwei Variablen x, y . Bei drei oder mehr Variablen x_1, \dots, x_n sind die gleichen Techniken „analog“ anwendbar, aber schreib- und rechentechnisch weit aufwändiger.

Wir reden manchmal allgemeiner von Optimierung, wenn bei einer Fragestellung (zunächst) unklar ist, ob eine Minimierung oder Maximierung vorliegt.

Problemstellung (lokale Optimierung)

lokale Minimierung

Zu minimieren ist eine **Zielfunktion** $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D(f)$ unter einer **Nebenbedingung in Gleich-Null-Form**: $b(x, y) = 0$, d.h. gesucht ist die Lösungsmenge aller Stellen $(x_0, y_0) \in D(f)$, die

1. $z = f(x, y)$ minimieren, d.h.
 $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D(f)$ „in der Nähe“ von (x_0, y_0) ,
2. die Nebenbedingung erfüllen, d.h. $b(x_0, y_0) = 0$,
3. nicht an dem „Rand“ des Definitionsbereichs liegen

lokale Maximierung

Zu maximieren ist eine **Zielfunktion** $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D(f)$ unter einer **Nebenbedingung in Gleich-Null-Form**: $b(x, y) = 0$, d.h. gesucht ist die Lösungsmenge aller Stellen $(x_0, y_0) \in D(f)$, die

1. $z = f(x, y)$ maximieren, d.h.
 $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ für alle $(x, y) \in D(f)$ „in der Nähe“ von (x_0, y_0) ,
2. die Nebenbedingung erfüllen, d.h. $b(x_0, y_0) = 0$,
3. nicht an dem „Rand“ des Definitionsbereichs liegen

Bei ökonomischen Fragestellungen mit n Variablen kommen solche Extremwertaufgaben meist mit $1 \leq m \leq n - 1$ „relevanten“ Nebenbedingungen vor, bei zwei Variablen also *mit einer Nebenbedingung*.

Bsp. 1

Die Gesamtkosten eines Produktes werden beschrieben durch die Funktion

$$f(x, y) = 2 \cdot x^2 + y^2 \quad (\text{Kapitaleinsatz } x > 0, \text{ Arbeitseinsatz } y > 0).$$

Die Kosten sollen minimiert werden unter der erschöpfenden Erlösbedingung $4 \cdot x + 2 \cdot y = 12$. D.h. minimiere $f(x, y)$ unter der Gleich-Null-Bedingung $b(x, y) := 4 \cdot x + 2 \cdot y - 12 = 0$.

Bsp. 2

Der maximale Output einer Güterausstattung zur Herstellung eines Produktes werde beschrieben durch folgende Funktion vom Cobb-Douglas Typ

$$f(x, y) = x^{1/3} \cdot y^{2/3} \quad (\text{Kapitaleinsatz } x > 0, \text{ Arbeitseinsatz } y > 0).$$

Der Output soll maximiert werden unter der erschöpfenden Kapazitätsbedingung $x + y = 300$. D.h. maximiere $f(x, y)$ unter der Gleich-Null-Bedingung $b(x, y) := x + y - 300 = 0$.

Zur Lösung solcher Optimierungsprobleme soll hier die *Multiplikatoren-Methode von Lagrange* vorgestellt werden. Sie bildet eine Standard-Methode, da sie sehr allgemein einsetzbar ist, denn das Schema läßt sich, mit entsprechenden Modifikationen, leicht übertragen auf Optimierungen von Funktion mit mehreren Variablen von beliebiger Anzahl und mehreren Nebenbedingungen in Gleich-Null-Form. Folgende Annahmen an die Zielfunktion $f(x, y)$ und die Nebenbedingungsfunktion $b(x, y)$ werden benötigt.

74 Annahmen der Lagrange-Methode an die Funktionen f, b und den Variablenbereich $D(f) = D(b)$

1) **Variablenbereich $D(f)$:** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$c_1 < x < d_1 \quad (-\infty \leq c_1 < d_1 \leq \infty) \quad \text{und} \quad c_2 < y < d_2 \quad (-\infty \leq c_2 < d_2 \leq \infty)$$

2) **f, b besitzen (total) stetige partielle Ableitungen $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$ bzw. $b''_{xx}, b''_{xy}, b''_{yx}, b''_{yy}$ zweiter Ordnung**

Die Anforderungen von Nr. 74 werden im Bsp. 1 von der Zielfunktion (ZF) $f(x, y)$, der Nebenbedingungsfunktion (NB) $b(x, y)$ und dem Variablenbereich $D(f)$ erfüllt. Wir werden die Multiplikatoren-Methode von Lagrange anhand von Bsp. 1 illustrieren.

75 Multiplikatoren-Methode von Lagrange

Die Optimierung der Zielfunktion $f(x, y)$ unter einer (relevanten) Nebenbedingung in Gleich-Null-Form: $b(x, y) = 0$, wird äquivalent zusammengefasst in die Optimierung der **Lagrange-Funktion**

$$L(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda \cdot b(x, y)$$

mit dem (zunächst unbekanntem) Lagrange-Multiplikator λ .

- 1 Bringe die Nebenbedingung in Gleich-Null-Form ($NB = 0$): $b(x, y) = 0$
 und bilde damit, zusammen mit der Zielfunktion (ZF): $f(x, y)$
 die Lagrange-Funktion (LF): $L(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda \cdot b(x, y)$

In Bsp. 1:

$$NB = 0 : b(x, y) = 4 \cdot x + 2 \cdot y - 12$$

$$ZF : f(x, y) = 2 \cdot x^2 + y^2$$

$$LF : L(x, y, \lambda) = 2 \cdot x^2 + y^2 + \lambda \cdot (4 \cdot x + 2 \cdot y - 12)$$

- 2 Bilde die partiellen Ableitungen von L und setze diese simultan gleich Null:

2-1 $L'_\lambda(x, y, \lambda) = b(x, y) = 0$ deshalb die ($NB = 0$)-Form!

2-2 $L'_x(x, y, \lambda) = f'_x(x, y) + \lambda \cdot b'_x(x, y) \stackrel{!}{=} 0$

2-3 $L'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + \lambda \cdot b'_y(x, y) \stackrel{!}{=} 0$

In Bsp. 1:

$$L'_\lambda(x, y, \lambda) = 4 \cdot x + 2 \cdot y - 12 = 0$$

$$L'_x(x, y, \lambda) = 4 \cdot x + 4 \cdot \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$L'_y(x, y, \lambda) = 2 \cdot y + 2 \cdot \lambda \stackrel{!}{=} 0$$

- 3 (Notwendiges Kriterium) Löse dieses (meist nicht-lineare) Gleichungssystem von drei Gleichungen nach den drei Variablen λ, x, y auf. Lösungen bestehen aus je drei Werten (x_0, y_0) und λ_0 , wobei dann (x_0, y_0) eine Kandidatin für eine Extremstelle von f ist: eine **(bedingte) stationäre Stelle**.

Die Auflösung eines nicht-linearen Gleichungssystems kann sehr einfach sein, aber auch beliebig schwierig werden, eine generelle Lösungs-Methode ist nicht angebar. Wir werden allerdings hier **ausschließlich Optimierungsprobleme behandeln, in denen Variablensubstitutionen zum Ziel führen**. Für die wichtigsten Problemstellungen im Anwendungsbereich, bei denen ein solches Vorgehen nicht erfolgreich ist, sind aber oft Lösungen bekannt. ▷ Ökonomische Veranstaltungen

In Bsp. 1:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot x + 2 \cdot y - 12 = 0 \\ 4 \cdot x + 4 \cdot \lambda = 0 \\ 2 \cdot y + 2 \cdot \lambda = 0 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot x + 2 \cdot y - 12 = 0 \\ 4 \cdot x - 4 \cdot y = 0 \\ \lambda = -y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot x + 2 \cdot x = 12 \\ x = y \\ \lambda = -y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \\ \lambda = -2 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

D.h. $(x_0, y_0, \lambda_0) = (2, 2, -2)$ ist einzige Lösung, (x_0, y_0) ist einzige bedingte stationäre Stelle.

- 4 (Hinreichendes Kriterium) Bestimme für jede bedingte stationäre Stelle (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0 die zweiten partiellen Ableitungen von f und b und damit den Wert

$$\begin{aligned} D_0 & := D(x_0, y_0, \lambda_0) := \\ & (f''_{xx} + \lambda_0 \cdot b''_{xx}) \cdot (b'_y)^2 - 2 \cdot (f''_{xy} + \lambda_0 \cdot b''_{xy}) \cdot b'_x \cdot b'_y + (f''_{yy} + \lambda_0 \cdot b''_{yy}) \cdot (b'_x)^2 \end{aligned}$$

wobei alle Ableitungen an der bedingten stationären Stelle (x_0, y_0) gebildet werden.

- 4a Falls $D_0 > 0$, so ist (x_0, y_0) **lokale Minimalstelle** der ZF f unter der NB $b(x_0, y_0) = 0$; Minimalwert: $f(x_0, y_0)$.
- 4b Falls $D_0 < 0$, so ist (x_0, y_0) **lokale Maximalstelle** der ZF f unter der NB $b(x_0, y_0) = 0$; Maximalwert: $f(x_0, y_0)$.
- 4c Falls $D_0 = 0$, so ist keine Entscheidung möglich.

In Bsp. 1:

$$- f''_{xx}(x, y) = 4, f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 0 \text{ und } f''_{yy}(x, y) = 2$$

$$- b''_{xx}(x, y) = b''_{xy}(x, y) = b''_{yx}(x, y) = b''_{yy}(x, y) = 0$$

Damit

$$D_0 = 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 4^2 = 48 > 0,$$

d.h. $(2, 2)$ ist eine lokale Minimalstelle von f unter Nebenbedingung $4 \cdot x + 2 \cdot y = 12$

Minimalwert: $f(2, 2) = 2 \cdot 2^2 + 2^2 = 12$

Als nächstes wird ein Hilfsmittel für Extremwertbestimmungen vorgestellt, das in dem Versuch besteht, zunächst die Zielfunktion in eine Form zu bringen, die leichter handhabbar ist (d.h. „einfachere“ Ableitungen, eine einfachere Methode anwendbar machen):

76 Monotone Transformation der Zielfunktion

Monotone Transformation heißt jede strikt monoton wachsende Funktion $h(z)$ einer Variable z , z.B. für $z > 0$, d.h. $D(h) = \mathbb{R}_{>0}$,

$$h(z) = z^2, h(z) = z^{1/2}, h(z) = \ln(z), h(z) = e^z.$$

Wegen der strengen Monotonie gilt für alle Zahlenvergleiche im Definitionsbereich von h (\triangleright Nr.14 (MF2)):

$$z \leq z_0 \Leftrightarrow h(z) \geq h(z_0),$$

d.h. z_0 maximiert/minimiert eine Menge zulässiger Zahlen z genau dann, wenn die Zahl $h(z_0)$ die monoton transformierten Zahlen $h(z)$ maximiert/minimiert. Wenn die zulässigen Zahlen z Funktionswerte $z = f(x, y)$ sind, so bedeutet dies: Jede Maximalstelle/Minimalstellen (x_0, y_0) von zulässigen Zahlen $z = f(x, y)$ ist auch eine Maximalstelle/Minimalstelle der Zahlen $h(z) = h(f(x, y))$, und umgekehrt.

Bsp. 2 (Fortsetzung)

Gemäß Nr. 76 ist das Maximierungsproblem gleichbedeutend mit der folgenden Aufgabenstellung

$$\text{maximiere } \ln(f(x, y)) = \frac{1}{3} \cdot \ln x + \frac{2}{3} \cdot \ln y \text{ unter der Nebenbedingung } b(x, y) = 0$$

Nun also Anwendung der Multiplikatoren-Methode von Lagrange auf dieses neue Maximierungsproblem

- **Aufstellen der Lagrange-Funktion:**

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{3} \cdot \ln x + \frac{2}{3} \cdot \ln y + \lambda(x + y - 300)$$

- **Bestimmung der bedingten stationären Punkte:**

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y - 300 = 0 \\ \frac{1}{3x} + \lambda = 0 \\ \frac{2}{3y} + \lambda = 0 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x + y - 300 = 0 \\ \lambda = -\frac{1}{3x} \\ \frac{2}{3y} - \frac{1}{3x} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2 \cdot x = 300 \\ \lambda = -\frac{1}{3x} \\ y = 2 \cdot x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 100 \\ y = 200 \\ \lambda = -1/300 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Also $(100, 200, -1/300)$ einzige Lösung, $(100, 200)$ einzige bedingte stationäre Stelle

- **Berechnung von $D(100, 200, -1/300)$:**

$$- (\ln(f))''_{xx}(x, y) = -\frac{1}{3x^2}, (\ln(f))''_{yy}(x, y) = -\frac{2}{3y^2}$$

$$- (\ln(f))''_{xy}(x, y) = (\ln(f))''_{yx}(x, y) = 0$$

$$- b''_{xx}(x, y) = b''_{xy}(x, y) = b''_{yx}(x, y) = b''_{yy}(x, y) = 0$$

$$- D(100, 200, -1/300) = \left(-\frac{1}{3 \cdot 100^2} + 0\right) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + \left(-\frac{2}{3 \cdot 200^2} + 0\right) \cdot 1 = -\frac{1}{20000}$$

$D(100, 200, -1/300) < 0$, d.h. $(100, 200)$ lokale Maximalstelle von $\ln(f(x, y))$ unter Nebenbedingung $b(x, y) = 0$. Nach Nr. 76 bedeutet dies, dass $(100, 200)$ auch Lösung des ursprünglichen Maximierungsproblems ist, also $(100, 200)$ ist lokale Maximalstelle von $f(x, y)$ unter Nebenbedingung $x + y = 300$, Maximalwert $f(100, 200) = 2^{2/3} \cdot 100$.

Zum Abschluß noch ein paar Bemerkungen zur Verallgemeinerung der Lagrange-Methode auf die Optimierung einer Funktion von n Variablen $f(x_1, \dots, x_n)$ unter den m Nebenbedingungen in Gleich-Null-Form

$$b_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, b_m(x_1, \dots, x_n) = 0$$

- 1 Die Optimierungsaufgabe wird analog zu Nr. 75 äquivalent zusammengefasst in die Optimierung der sogenannten *Lagrange-Funktion*

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) := f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \cdot b_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \cdot b_m(x_1, \dots, x_n)$$

d.h. zu jeder Nebenbedingungsfunktion b_j gibt es einen eigenen, noch näher zu bestimmenden Parameter λ_j , der als Faktor in der Lagrange-Funktion auftritt. Diese Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ heißen Lagrange-Multiplikatoren des Extremwertproblems für f unter den m Nebenbedingungen b_1, \dots, b_m .

- 2 Für das Aufsuchen der Kandidatinnen für optimale Stellen sind dann die partiellen Ableitungen $L'_{\lambda_1}, \dots, L'_{\lambda_m}, L'_{x_1}, \dots, L'_{x_n}$ zu bilden und simultan gleich Null zu setzen. Damit erhält man ein Gleichungssystem mit den n Variablen (x_1, \dots, x_n) und den m Hilfsvariablen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.
- 3 Zu jeder Lösung $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m)$ des Gleichungssystems ist $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ Kandidatin einer Extremstelle, eine *bedingte stationäre Stelle*.
- 4 Es gibt hinreichende Kriterien zur Überprüfung, welche Sorte von Extremstellen die ermittelten bedingten stationären Stellen sind. Aber die Formulierung dieser allgemeinen Kriterien, die über den behandelten Fall mit 2 Variablen und 1 Nebenbedingung hinausgehen, sprengen den Rahmen dieses Basiskurses.

Bei drei Variablen und zwei Nebenbedingungen:

- **Lagrange-Funktion:**

$$L(x, y, z; \lambda, \mu) := f(x, y, z) + \lambda \cdot b(x, y, z) + \mu \cdot c(x, y, z)$$

- **Gleichungssystem zur Ermittlung der bedingten stationären Stellen:**

$$b(x, y, z) = 0$$

$$c(x, y, z) = 0$$

$$f'_x(x, y, z) + \lambda \cdot b'_x(x, y, z) + \mu \cdot c'_x(x, y, z) = 0$$

$$f'_y(x, y, z) + \lambda \cdot b'_y(x, y, z) + \mu \cdot c'_y(x, y, z) = 0$$

$$f'_z(x, y, z) + \lambda \cdot b'_z(x, y, z) + \mu \cdot c'_z(x, y, z) = 0$$

Bsp.

Zielfunktion $f(x, y, z) = 4 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$,

Nebenbedingungsfunktionen $b(x, y, z) = x + z - 100$, $c(x, y, z) = x^2/2 + y - 10$

- **Lagrange-Funktion:**

$$L(x, y, z; \lambda, \mu) = 4 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z + \lambda \cdot (x + z - 100) + \mu \cdot (x^2/2 + y - 10)$$

- bedingte stationäre Stellen

$$\left\{ \begin{array}{l} b(x, y, z) = 0 \\ c(x, y, z) = 0 \\ f'_x(x, y, z) + \lambda \cdot b'_x(x, y, z) + \mu \cdot c'_x(x, y, z) = 0 \\ f'_y(x, y, z) + \lambda \cdot b'_y(x, y, z) + \mu \cdot c'_y(x, y, z) = 0 \\ f'_z(x, y, z) + \lambda \cdot b'_z(x, y, z) + \mu \cdot c'_z(x, y, z) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + z - 100 = 0 \\ x^2/2 + y - 10 = 0 \\ 4 + \lambda + \mu \cdot x = 0 \\ 2 + \mu = 0 \\ 2 + \lambda = 0 \end{array} \right\}$$

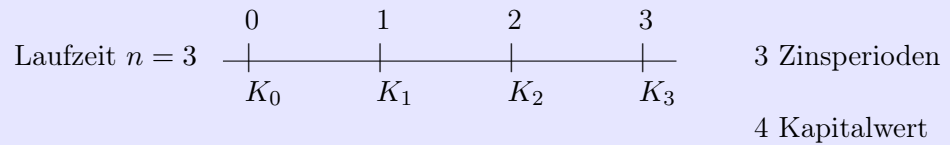
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 100 - x \\ y = 10 - x^2/2 \\ 4 - 2 - 2 \cdot x = 0 \\ \mu = -2 \\ \lambda = -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 99 \\ y = 19/2 \\ x = 1 \\ \mu = -2 \\ \lambda = -2 \end{array} \right\}$$

Also $(1, 19/2, 99, -2, -2)$ einzige Lösung des Gleichungssystems, und damit $(1, 19/2, 99)$ einzige bedingte stationäre Stelle.

Elementare Zinsrechnung

Zinssatz (Rendite) je Zinsperiode	$i = p\%$	$p = \text{Prozentpunkte}$
Zinsfaktor (Aufzinsungsfaktor)	$q = 1 + i$	
Diskontfaktor (Abzinsungsfaktor)	$v = 1/(1 + i) = q^{-1}$	
Laufzeit n Zinsperioden (<u>Zeitintervalle</u>)	$j = 1, \dots, n$	
zugehörige $n + 1$ <u>Zeitpunkte</u>	$j = 0, 1, \dots, n$	
K_j Kapitalwert zum Zeitpunkt j (nach j Zinsperioden)		

Bsp. 1



K_0 Barwert (Startkapital, Gegenwartswert)

K_n Endwert (Zielwert)

VORSICHT mit Bezeichnungen/Formeln bei der Zinsrechnung: Es ist auch üblich, den Prozentsatz $i = p\%$ als *Zinsrate* (*interest rate*) zu benennen und die Prozentzahl (Prozentpunkte) p als Zinssatz(!!!) oder als *Zinsfuß*. Dabei wird manchmal unklar definiert „ $p = \text{Zinssatz (in Prozent)}$ “, obwohl damit kein Prozentsatz, sondern Prozentpunkte gemeint sind:

Bsp. 2 „ $p = 3$ (Prozentpunkte), $i = 3\%$ “. Dann ist p die Zahl 3 mit der Maßeinheit „Prozentpunkte“ (missverständlich: „Prozent“), aber „ $i = 3\%$ “ meint die dimensionslose Zahl $0.03 = 3/100 = 3$ Prozent von 1.

Verwenden Sie bei „Prozentangaben“ in der Zinsrechnung immer die Angabeform **p Prozentpunkte**, wenn Sie die **Prozentzahl p** meinen!

Zinsperioden konstanter Länge (meist Jahre)

77 Zinseszinsrechnung (Auflösen der Endwertformel) $K_0 > 0$

Endwert $K_n = K_0 \cdot q^n$

Barwert $K_0 = K_n \cdot q^{-n} = K_n \cdot v^n$

Zinsfaktor $q = (K_n/K_0)^{1/n}$ Rendite $p\% = i = q - 1$

Laufzeit 1. $x = \frac{\ln(K_x/K_0)}{\ln q} = \frac{\ln K_x - \ln K_0}{\ln q}$ meist: $x \notin \mathbb{N}$

2. $n = \lceil x \rceil$ Zeitpunkt der ersten Überschreitung des Zielwerts

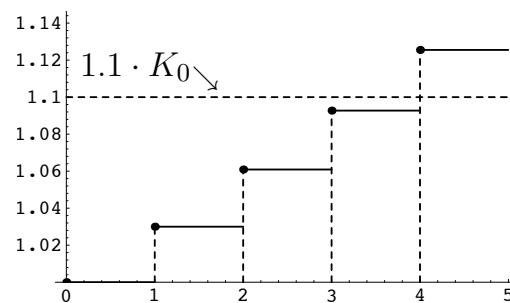
K_x durch K_n , d.h. $K_n \geq K_x > K_{n-1}$

Bsp. 3a Gegeben: $K_0 > 0, p\% = 3\%, n = 5$. Gefragt: K_n
 $K_n = K_0 \cdot 1.03^5 (\approx K_0 \cdot 1.16)$

Bsp. 3b Gegeben: $K_n > 0, p\% = 3\%, n = 3$. Gefragt: K_0
 $K_0 = K_n / 1.03^3 (\approx K_n \cdot 0.89)$

Bsp. 3c Gegeben: $K_0 > 0, n = 12, K_n = 2K_0$. Gefragt: $i = p\%$
 $q = 2^{1/12}, p\% = 2^{1/12} - 1 (\approx 6\%)$

Bsp. 3d Gegeben: $K_0 > 0, p\% = 3\%, K_x = 1.1K_0$. Gefragt: $n = \lceil x \rceil$



Skizze des Verlaufs der Kapitalhöhe bei $i = p\% = 3\%, K_0 = 1$, und Zielwert $K_x = 1.1 \cdot K_0$. Zeitpunkt n der ersten Überschreitung des Zielwerts K_x durch K_n : $n = \lceil \frac{\ln 1.1}{\ln 1.03} \rceil = \lceil 3.22 \rceil = 4$, d.h. $K_4 \geq K_x > K_3$.

Als Beispiel einer einfachen Anlageform auf Basis der Endwertformel (mit dem Spezialfall *Bundesschatzbrief* Typ B):

78 Zinsstaffel (verschiedene Zinssätze in den einzelnen Zinsperioden)

$$i_j = p_j\% \quad \text{Zinssatz für Zinsperiode } j \quad j = 1, \dots, n$$

$$q_j = 1 + i_j \quad \text{Zinsfaktor für Zinsperiode } j$$

$$\text{Endwert} \quad K_n = K_0 \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_n = K_0 \cdot (q_{\text{eff}})^n$$

$$\text{Effektiver Zinsfaktor} \quad q_{\text{eff}} = (q_1 \cdot \dots \cdot q_n)^{1/n} = (K_n/K_0)^{1/n}$$

$$\text{Effektiver Zinssatz} \quad i_{\text{eff}} = p_{\text{eff}}\% = q_{\text{eff}} - 1$$

Faktoren sind vertauschbar: Eine „Zinsstaffel“ entsteht ggf. durch sortieren!

Sollen im Gegensatz zu den Basisformeln Nr. 77 bei den Verzinsungen nicht nur einmalige, sondern auch fortlaufende Zahlungen berücksichtigt werden, so kann man auf folgende Formeln für Summen endlicher geometrischer Folgen (\triangleright Thema 4) zurückgreifen.

79 Endliche geometrische Summen

$$a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \dots + a \cdot q^m = \begin{cases} a \cdot \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1} & \text{für } q \neq 1 \\ a \cdot (m + 1) & \text{für } q = 1 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R})$$

Bsp. 3 (Sparplan)

Ein zehnjähriger Sparplan setze sich aus folgenden Bestandteilen zusammen. Eine *vorschüssige* jährliche Einzahlung von 100 Euro (d.h. keine Einzahlung im letzten Jahr, also 10 Zahlungen), eine Verzinsung von 10% des Einzahlungsbetrags, wobei die erste Verzinsung nach dem ersten Jahr erfolgt. Als Gesamtsparbetrag ergibt sich

$$\begin{aligned} 100 \cdot 1.1^1 + \dots + 100 \cdot 1.1^{10} &= 100 \cdot 1.1 + 100 \cdot 1.1 \cdot 1.1^1 + \dots + 100 \cdot 1.1 \cdot 1.1^9 \\ &= 110 + 110 \cdot 1.1^1 + \dots + 110 \cdot 1.1^9 = 1100(1.1^{10} - 1) \\ &\approx 1753.12 \end{aligned}$$

Der systematische Einsatz der Formel für endliche geometrische Summen (\triangleright Nr. 79) für die Verzinsung fortlaufender konstanter Zahlungen ergibt folgende Basisformeln.

80 Regelmäßige konstante Zahlungen zu den einzelnen Zinsperioden

Endwert bei jährlichen Ratenzahlungen A über n Zinsperioden (Jahre)

Einzahlung $A > 0$, Auszahlung $A < 0$

$$E_n = E_0 \cdot q^n + A \cdot q^t \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \begin{array}{l} \text{vorschüssig } t = 1 \\ \text{nachschüssig } t = 0 \end{array}$$

<i>Bsp. 4a</i>	0	1	2	3	4	Zeitpunkte
Laufzeit $n = 3$	—	—	—	—		3 Zinsperioden
<i>vorschüssig</i>	$E_0 + A$	A	A	0		3 Raten & E_0
<i>nachschüssig</i>	E_0	A	A	A		3 Raten & E_0
	q^3	q^2	q^1	q^0		4 Zinsfaktoren

Barwert einer jährlichen Rente R über n Zinsperioden (Jahre)

$$B_n = R \cdot v^t \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{R}{q^t \cdot q^{n-t}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \begin{array}{l} \text{vorschüssig } t = 0 \\ \text{nachschüssig } t = 1 \end{array}$$

<i>Bsp. 4b</i>	0	1	2	3	4	Zeitpunkte
Laufzeit $n = 3$	—	—	—	—		3 Zinsperioden
<i>vorschüssig</i>	R	R	R	0		3 Raten/Renten
<i>nachschüssig</i>	0	R	R	R		3 Raten/Renten
	q^0	q^{-1}	q^{-2}	q^{-3}		4 Diskontfaktoren
	v^0	v^1	v^2	v^3		

Bsp. 5a) Geg. $n = 10, A > 0, i = 3\%$, vorschüssige Zahlung. $E_{10} = ?$
 $q = 1.03, E_{10} = 0 + A \cdot 1.03 \cdot \frac{1.03^{10} - 1}{0.03} (\approx 11.81 \cdot A)$

Bsp. 5b) Geg. $n = 5, R > 0, i = 3\%$, vorschüssige Zahlung. $B_5 = ?$
 $q = 1.03, B_5 = R \cdot \frac{1.03^5 - 1}{1.03^4 \cdot 0.03} (\approx 4.72 \cdot R)$

Bsp. 5c) Ein Betrag $K > 0$ soll jährlich vorschüssig über 10 gleiche Raten der Höhe A angespart werden um dann ab dem folgenden Jahr durch eine vorschüssige jährliche Rente der Höhe R in 5 Jahren aufgebraucht zu werden. Kalkulationszinssatz $i = 3\%$. Welche Beziehung besteht zwischen A und R ? [$1.03^5 \approx 1.16, 1.03^{10} \approx 1.34$]

$$\text{Ansatz: } E_{10} = K = B_5, \text{ also } \overbrace{A \cdot 1.03 \cdot \frac{1.03^{10} - 1}{0.03}}^{E_{10}} = \overbrace{R \cdot \frac{1.03^5 - 1}{1.34^4 \cdot 0.03}}^{B_5}. \text{ Dies ergibt } A \cdot 1.03^5 \cdot \frac{1.03^{10} - 1}{1.03^5 - 1} = R, \text{ d.h. } \mathbf{R/A} = 1.03^5(1.03^5 + 1) = 1.03^{10} + 1.03^5 \approx \mathbf{2.5}$$