Mathematik für Ökonomen - Aufgaben

ARBEITSUNTERLAGEN

für Studierende des Bachelorstudiengangs BWL

an der Mercator School of Management

der Universität Duisburg-Essen

konzipiert und erstellt von

Hermann Hoch (Dipl.-Volksw., Dipl.-Math., Dr. rer. nat.)

überarbeitet von

Volker Krätschmer

unter Mitarbeit von

Bastian Becker, Sabine Christ, Armin Massmann

gelesen von

Dr. Rene Simon

Universität Duisburg-Essen, Campus Duisburg, SS 25

Vorbemerkungen

- Dies ist die Gesamtausgabe der Arbeitsmaterialien, in der die vorlesungsbegleitenden Aufgaben zusammegefasst werden. Die vorliegende Version ist vorläufig. Aktuelle (überarbeitete, korrigierte) Fassungen finden Sie unter

  http://www.uni-due.de/mathematik/mathoek-duisburg/

- Die Aufgaben sind den einzelnen Unterrichtseinheiten, den sogenannten *Themen zugeordnet.* Zu unterscheiden sind dabei unterschiedliche Aufgabentypen. Aufgaben die mit **A** markiert sind, dienen der Motivation und Illustration des Unterrichtsstoffes. Sie werden teilweise in den Vorlesungen behandelt und sind klausurrelevant. Aufgaben mit Kennzeichnung **T** sollen den Unterrichtsstoff aus der Vorlesung aufnehmen und das Verständnis vertiefen. Sie werden teilweise in den Tutorien und Übungen gerechnet.

- **Empfehlung:**
  In den Veranstaltungen (Vorlesungen, Übungen, Tutorien) wird nur eine Auswahl der hier zu findenden Aufgaben behandelt. Es wird empfohlen, die übrigen als Trainingsmaterial zu nutzen. Je mehr Aufgaben selbständig bearbeitet werden, desto vertrauter der Stoff, desto größer die eigene Sicherheit bei der Klausur!

-

Inhalt

A 1 *Aussagen*

Über ein weltweit vertriebenes Produkt gebe es folgende Aussagen:

$A =$ „Das Produkt hat in der Europäischen Union einen Marktanteil von mehr als 25%".

$B =$ „Das Produkt hat in den USA einen Marktanteil von mehr als 25%".

Beschreiben Sie die folgenden Aussagen

$$\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B.$$

A 2 *Mengenoperationen*

Ein Zeitungsartikel bespricht die Ergebnisse einer Umfrage zu drei Problemkreisen. A, B, C bezeichne die Menge aller Befragten, die Frage a, b, c uneingeschränkt zustimmen.
Sie interessieren sich vor allem für die prozentualen Anteile der Befragten, bei denen folgende Konstellationen vorliegen:

$$A \cap B,\ B \setminus C,\ C \setminus B,\ A \cup B,\ \overline{A \cup B \cup C}$$

Beschreiben Sie diese Mengen mit Worten.

A 3 *Mengenoperationen*

Eine Menge X von Personen kann nach der Zugehörigkeit zu Blutgruppen und nach dem Vorhandensein des Rhesusfaktors eingeteilt werden, indem die Blutgruppen auf die Anwesenheit der Faktoren A, B, Rh untersucht werden. Das Blut gehört zur Gruppe A, wenn es nur den Faktor A aber nicht den Faktor B, zur Gruppe B, wenn es B aber nicht A, und zur Gruppe 0, wenn es weder A noch B enthält. Außerdem wird es als Rhesus positiv $(+)$ beziehungsweise negativ $(-)$ bezeichnet, je nachdem ob der Rhesusfaktor vorhanden ist, oder nicht. Mit A, B, Rh seien nun die Teilmengen von X bezeichnet, bei denen das Blut den entsprechenden Faktor enthält. Beschreiben Sie die Blutgruppe 0 negativ durch Mengenoperationen von A, B, Rh.

A 4 *Anwendung der Potenzgesetze*

$$2^3 =?,\ a^0 =?,\ 8^{-3} =?,\ \frac{2^7}{2^2} =?,\ \left(\frac{3}{4}\right)^2 =?,\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2 =?$$

$$(-8)^{1/3} =?,\ 8^{-1/3} =?,\ 16^{\frac{5}{2}} =?,\ 16^{-1.25} =?,\ (0.0001)^{1/4} =?,\ \left(\sqrt[3]{27} \cdot 4\right)^2 =?.$$

A 5 *Monotonie von Grundfunktionen*

Ordnen Sie die folgenden Zahlen der Größe nach

(a) $(-17)^{1/3}, \pi^{1/3}, 0, 1, 2, 15^{1/3}$

(b) $\ln(0.75), \ln(2), 0, 1$

(c) $0, e^2, 1, e^{17}$

A 6 *Grundfunktionen: Rundung, Betrag*

Skizzieren Sie über dem Bereich $-2 \leq x \leq 3$ durch

(a) $\lceil x \rceil$ und (b) $|(x-1)/2|$

gegebenen Funktionen (Funktionswerte an Sprungstellen hervorheben).

A 7 *Produktionsfunktion vom Cobb-Douglas Typ*

Die Outputmöglichkeiten für ein Produkt werde durch eine sogenannte Produktionsfunktion vom Cobb-Douglas Typ beschrieben

$$f(K, L) = 100 \cdot K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}.$$

Dabei bezeichne K den Kapital- und L den Arbeitseinsatz.

(a) Welche Beschränkungen müssen K und L erfüllen, d.h., welches ist der Definitionsbereich der Funktion f?

(b) Berechnen Sie die Outputmenge zu einem Investitionseinsatz von $K = 81$ und $L = 16$.

A 8 *Exponentialfunktion, Logarithmus*

Gegeben sei die Produktionsfunktion $f(K, L)$ vom Cobb-Douglas Typ aus A 7. Bestimmen Sie die logarithmierte Produktionsfunktion, d.h. die durch $y = \ln(f(K, L))$ definierte Funktion. Wie läßt sich die Produktionsfunktion durch die logarithmierte Produktionsfunktion beschreiben?

„Linearisierung“ exponentieller Modelle ▷ Empirische Wirtschaftsforschung/Statistik

T 1 *Aussagen*

Bestimmen Sie hinreichende Bedingungen (Voraussetzung) und notwendige Bedingung (Folgerung) bei den Aussagen:

(a) $(x = -3 \Rightarrow x^2 = 9)$

(b) $(x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq -3)$

(c) Für eine differenzierbare Funktion f mit $f'(x_0) \neq 0$ liegt an der Stelle x_0 kein Extremwert vor.

(d) Ich gehe erst ins Wasser, wenn ich schwimmen kann.

T 2 *Mengenoperationen*

Sei X die Menge aller in Deutschland gemeldeten Einwohnerinnen und Einwohner, während A die Menge aller in Deutschland gemeldeten Einwohnerinnen bezeichne. Außerdem seien $B := \{x \in X : x \text{ erwerbstätig}\}$ und $C := \{x \in X : x \text{ besitzt Hochschulabschluß}\}$. Beschreiben Sie folgende Mengen durch Mengenoperationen von A, B, C.

(a) D die Menge aller erwerbstätigen Einwohnerinnen,

(b) E die Menge aller nicht erwerbstätigen Einwohnerinnen,

(c) F die Menge aller Einwohner und Einwohnerinnen, die weder weiblich noch erwerbstätig sind.

T 3 *Mengenoperationen*

Eine Bankkundin möchte eine Erbschaft von 10 000 Euro in Anteile von deutschen und chinesischen Aktien anlegen. Mit den Variablen x_1 und x_2 werden die in die deutschen beziehunsweise chinesischen Aktien anzulegenen Geldbeträge (in Euro) bezeichnet. Es sind keine negativen Geldbeträge zugelassen. Außerdem darf nicht mehr als der Erbschaftsbetrag ausgegeben werden und die Kundin möchte keinen höheren Anlagebetrag für chinesische Aktien ausgeben als für deutsche. Beschreiben Sie die Gesamtheit der Anlagebedingungen durch eine geeignete Menge.

T 4 *Anwendung von Potenzgesetzen*

$\frac{1}{2^{-3}} =?,\ \left(\frac{5}{4}\right)^2 =?,\ 7^6 \cdot 7^{-6} =?,\ (-1.5)^3 =?,\ 2^3 \cdot 5^3 =?,\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-2} =?,\ 5^{-3} =?,\ \frac{5 \cdot a^7}{a^6} =?$

$\sqrt{9 \cdot 16} =?,\quad 9^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{6}} =?,\quad (\sqrt{8} \cdot 27)^{\frac{2}{3}} =?,\quad 32^{-\frac{1}{5}} =?$

$(\frac{u^{-5}v^5}{v^{-3}u^{-2}v^0})^{-3} = ?,\quad \sqrt[5]{x\sqrt{x^3}} = ?,\quad (\frac{u^{-1/5}v^{4/5}}{v^{-3/2}u^{-1/2}v^0})^{3/2} = ?$

T 5 *Anwendung von Binomischen Formeln*

$$31^2 - 30^2,\ 4^{-2} - 5^{-2},\ \left(\frac{1}{x} - x\right)^2,\ \left(5^{-2} + 5\right)^2,\ (3 \cdot u - 5 \cdot v)^2$$

T 6 *Definitionsbereiche von Funktionen*

Bestimmen Sie die Definitionsbereiche der folgenden Funktionen

(a) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

(b) $f(x) = (2x+4)^{\frac{1}{6}}$

(c) $f(x) = \ln(x-2)$

T 7 *Monotonie von Grundfunktionen*

Ordnen Sie die folgenden Zahlen der Größe nach

(a) $(-17)^{-1/3}, \pi^{-1/3}, 1, 2, 15^{1/3}$

(b) $\ln(e^{-1}), 2, \ln(2), 0, 1$

(c) $e^{-\ln(4)}, e^1, 1$

(d) $|-4|, |1/4|, |4|, |-1/2|$

T 8 *Grundfunktionen: Rundung, Betrag*

Skizzieren Sie über dem Bereich $-2 \leq x \leq 3$ die durch

(a) $\lceil x \rceil$ (b) $[x]$ (c) $|x - 1/2|$

gegebenen Funktionen (Funktionswerte an Sprungstellen hervorheben).

T 9 *Eigenschaften der Exponentialfunktion*

(a) Für welche Zahl x erhält man den Funktionswert $e^x = 2$?

(b) Für welche Zahlen x erhält man

(b1) $e^x > 1$? (b2) $e^x \geq 1$?

(c) Sei t eine Zahl mit der Eigenschaft $e^{2 \cdot t} = 2$. Berechnen Sie $e^{-2\ln(5)+2 \cdot t}$.

T 10 *Rechenregeln für Logarithmus*

Drücken Sie die folgenden Zahlen durch $\ln(3)$ aus

$\ln(9)$, $\ln(\sqrt{3})$, $\ln(\sqrt[5]{3^2})$, $\ln(\frac{1}{81})$.

A 9 *Äquivalenzumformung von Gleichungen*

Bestimmen Sie jeweils die x-Lösungsmenge $= \{x \in \mathbb{R} : x$ erfüllt Gleichung$\}$

(a) $(|x| - 2)^2 = 1$

(b) Für $0 < x < 1$: $\ln(1 - x^4) = \frac{1}{2}$ bzw. $\ln(1 - x^4) = -\frac{1}{2}$

(c) $2 \cdot x \cdot e^{-x/2} - 6 \cdot e^{-x/2} + 8 \cdot x \cdot e^{-x/2} = 0$

(d) $(4 + 2|x|^3)^{-1} = \frac{1}{20}$

A 10 *Unterjährige und stetige Verzinsung*

Ein Guthaben von 10000 Euro soll durch eine geeignete Verzinsung i nach einem Jahr verdoppelt werden. Wie muß $i > 0$ gewählt werden bei folgenden Auszahlungsmodi?

(a) **Wöchentliche Verzinsung**
D.h. welche Lösungsmenge besitzt die Gleichung: $10000 \cdot (1 + \frac{i}{52})^{52} = 20000$?

(b) **Tägliche Verzinsung**
D.h. welche Lösungsmenge besitzt die Gleichung: $10000 \cdot (1 + \frac{i}{365})^{365} = 20000$?

(c) **Stetige Verzinsung**
D.h. welche Lösungsmenge besitzt die Gleichung: $10000 \cdot e^i = 20000$?

A 11 *Kostenminimierung*

Die laufenden Kosten eines Start up Unternehmens in Abhängigkeit zum Kapitaleinsatz $x > 1$ lassen sich beschreiben durch die Funktion

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{x}{100000} + \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{100000} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{x}{100000} + \frac{1}{4}\right)^2$$

Im Hinblick auf die Kostenminimierung führt der Standardansatz der univariaten Optimierung ($\triangleright$ *Thema 5*) auf die Bestimmung der Lösungsmenge zur Gleichung:

$$4 \cdot \left(\frac{x}{100000} + \frac{1}{4}\right) \cdot \ln\left(\frac{x}{100000} + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

Ermitteln Sie alle zulässigen Lösungen der Gleichung.

A 12 *Simultane Äquivalenzumformung zweier Gleichungen*

Bestimmen Sie jeweils die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die *simultan* die beiden Gleichungen erfüllt.

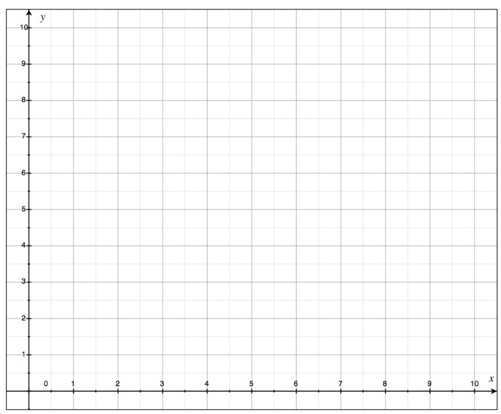
(a) $xy = 0$ und $x^2 - y^2 = 1$ (b) $x + y = 2$ und $x - 2y = 1$

(c) $4x - 8y = 0$ und $-8x + 4y^3 = 0$ (d) $4x + 4xy = 0$ und $2x^2 + 2y = 0$

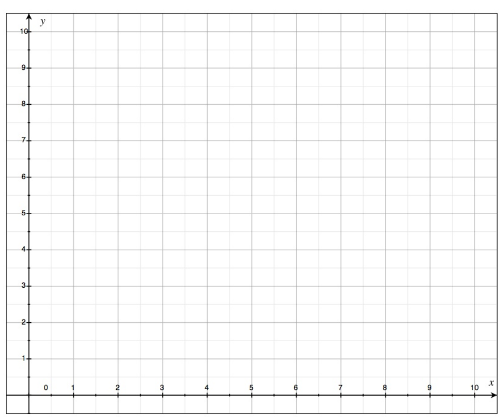
A 13 *Lösungsmenge von LUGS*

Schreiben Sie die folgenden LUGS in aufgelöster Form und skizzieren Sie jeweils die Lösungsmenge

(1) $x + y \geq 4$ (2) $3x + 2y \leq 20$ (3) $-x + 2y \leq 10$ (4) $y \geq 1$ (5) $x \geq 1$



(1) $x \geq 1$ (2) $2y + x \geq 5$ (3) $2y + x \leq 12$ (4) $y - \frac{5}{4}x \geq -\frac{11}{4}$



T 11 *Äquivalenzumformung von Gleichungen*

Bestimmen Sie jeweils die x-Lösungsmenge $= \{x \in \mathbb{R} : x$ erfüllt Gleichung$\}$

(a) $e^{x-5} = e^{4x-3}$; $\quad 2^x = 10$; $\quad 10^x = e$; $\quad e^x = \ln 10$

(b) $\ln(1+x^2) = \ln 2 - \ln(1/2)$; $\quad e^{1-x^2} = e^2$; $\quad e^{1-x^2} = e^{-2}$

(c) $x^3 + 6 \cdot x^2 - 16 \cdot x = 0$

(d) $(x^5 - 1) \cdot e^{-x^2/2} = 0$ bzw. $(|x|^5 - 1) \cdot e^{-x^2/2} = 0$

(e) $3 \cdot \big((x+2)^{3/2} - 8\big) \cdot (x+2)^{1/2} = 0$

T 12 *Anlagelaufzeit*

Ein Guthaben von 10000 Euro soll jährlich mit 10% verzinst werden. Wielange dauert es bis das Guthaben sich um 15% vergrössert hat? Gemäß den Methoden der Zinsesrechnung ($\triangleright$ *Thema 9*) ergibt sich damit die Aufgabe: Lösen Sie die Gleichung $10000 \cdot e^{x \cdot \ln(1.1)} = 11500$.

T 13 *Gewinnmaximierung*

Die Gewinne durch Erlös eines Produkte in Abhängigkeit von Outputmenge $x > 0$ lassen sich beschreiben durch die Funktion

$$f(x) = e^x \cdot \big(x^2 - 4 \cdot x - 9995\big)$$

Im Hinblick auf die Kostenminimierung führt der Standardansatz der univariaten Optimierung ($\triangleright$ *Thema 5*) auf die Bestimmung der Lösungsmenge zur Gleichung:

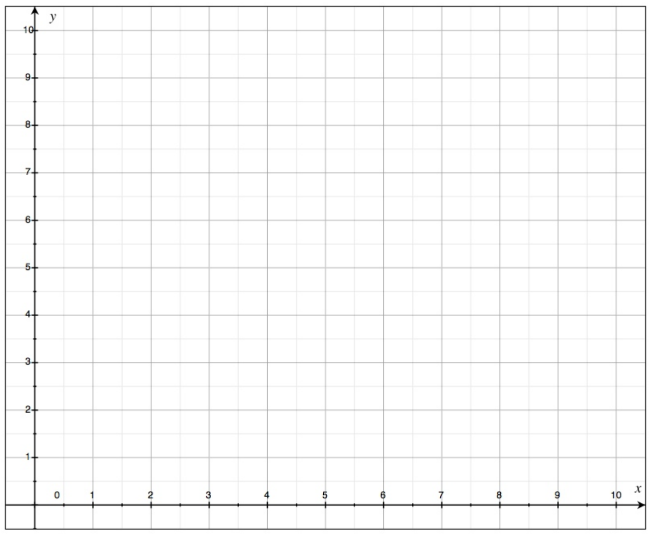
$$e^x \cdot \big(x^2 - 2 \cdot x - 9999\big) = 0.$$

Ermitteln Sie alle zulässigen Lösungen der Gleichung.

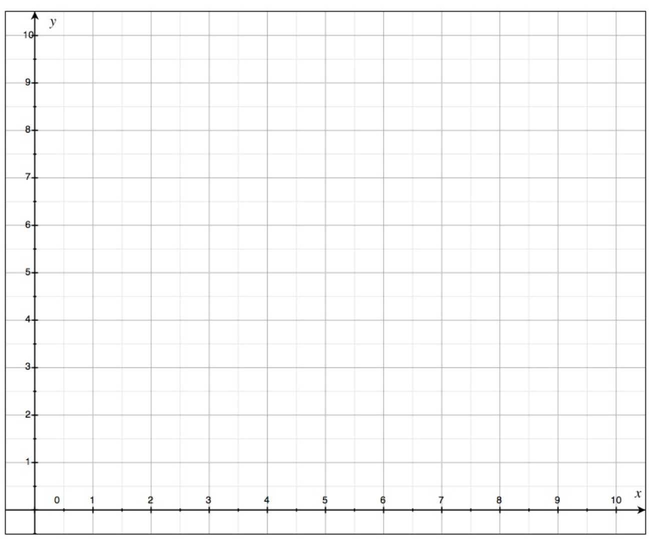
T 14 *Lösungsmenge von LUGS*

Schreiben Sie die folgenden LUGS in aufgelöster Form und skizzieren Sie jeweils die Lösungsmenge

(1) $x + y \geq 3$ (2) $x - y \leq 3$ (3) $2x + y \leq 10$ (4) $y \leq 7$ (5) $x \geq 1$



(1) $4y + 2x \leq 10$ (2) $2y - 8x \leq 2$ (3) $5y + x \geq 5$



A 14 *Elementare Matrixoperationen*

Führen Sie die folgenden drei Matrixoperationen aus („nicht definiert“ist ggf. auch ein Ergebnis). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}_{1\times 3}$$

(a) $C \cdot B$ (b) $B \cdot C$ (c) $(E_{3\times 3} - A)^T$

A 15 *Elementare Matrixoperationen*

Führen Sie die Matrixoperation $(A + B) \cdot B^T$ durch, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

A 16

Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

Rohstoffe	Zwischenprodukte Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	1	1
R_2	2	0	2

Zwischenprodukte	Endprodukte E_1	E_2	E_3
Z_1	1	0	1
Z_2	0	2	1
Z_3	2	3	1

Rohstoffpreise $r = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Verkaufspreise $p = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 40 & 20 \end{pmatrix}$

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$?

(c) Und welche Rohstoffkosten und welcher Verkaufserlös entstehen hierbei?

(d) Welche Zwischenproduktmengen erfordert die Endproduktion aus (b)?

T 15 *Elementare Matrixoperationen*

Führen Sie, falls möglich, die folgenden Matrixoperationen aus:

(1) $A^T + C$ (2) $\frac{2}{3}B \cdot C$ (3) $A \cdot B$ (4) $(\boldsymbol{e_3^{3\cdot}})^{\boldsymbol{T}} B$ (5) $B\ \boldsymbol{e_3^{2\cdot}}$

(6) $(\boldsymbol{e_3^{3\cdot}})^{\boldsymbol{T}} B\ \boldsymbol{e_3^{2\cdot}}$ (7) $(E_{3\times 3} - B)^T$ (8) $B \cdot A$ (9) $B \cdot \mathbf{1_3}$ (10) $\mathbf{1}_{\mathbf{3}}^{\boldsymbol{T}} \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1} \qquad B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 2 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{1\times 3}$$

T 16 *Elementare Matrixoperationen*

Führen Sie die Matrixoperation $(B + A) \cdot A^T$ durch, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

T 17

Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	1	3	4
	R_2	2	0	3

		Endprodukte	
		E_1	E_2
Zwischenprodukte	Z_1	0	2
	Z_2	2	1
	Z_3	1	0

Rohstoffpreise $r = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}$.
Verkaufspreise $p = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix}$

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(c) Und welche Rohstoffkosten und welcher Verkaufserlös entstehen hierbei?

A 17

Entscheiden Sie, ob folgende Matrizen invertierbar sind? Begründen Sie Ihre Entscheidung und geben Sie ggf. die Inverse an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A 18

Die drei $n \times n$-Matrizen A, B, C in der folgenden Matrixgleichungen seien invertierbar

$$B \cdot A \cdot C = D$$

(a) Ist D invertierbar? Falls ja: $D^{-1} =?$

(b) Lösen Sie die Gleichung nach A auf. $A^{-1} =?$

(c) Lösen Sie die Gleichung nach B auf. $B^{-1} =?$

(d) Lösen Sie die Gleichung nach C auf. $C^{-1} =?$

A 19

Eine der folgenden drei Matrizen B, C, D ist die Inverse der Matrix A. Welche? (Bitte mit *stichwortartiger* Begründung). $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, Kandidaten B, C, D für A^{-1}

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

T 18

Entscheiden Sie, ob folgende Matrizen invertierbar sind? Begründen Sie Ihre Entscheidung und geben Sie ggf. die Inverse an.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & -1/2 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 10 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T 19

Gegeben ist die folgende Matrixgleichung, wobei X unbekannt ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Welche Dimension muß X haben, damit die Gleichung definiert ist?

(b) Lösen die Gleichung nach X auf.

T 20

Die Inverse der Matrix $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Lösen Sie mit dieser Information die folgenden Matrixgleichungen nach X auf. Prüfen Sie hierbei zunächst, welche Dimension die Lösungsmatrix X haben wird.

(a) $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (b) $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ (c) $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A 20

Lösen Sie simultan das folgende lineare Gleichungssystem für die beiden angegebenen Zielvektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$

$$\begin{array}{rcrcrcl|c|c|}
 & & & & & & & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\
1 \cdot x_1 & - & 1 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & & 1 & -1 \\
1 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 1 \cdot x_3 & = & & 1 & 1 \\
0 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & - & 1 \cdot x_3 & = & & 1 & 2
\end{array}$$

A 21

Sind die folgenden drei Zeilenvektoren a, b, c linear unabhängig?

$$a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A 22

Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

A 23

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden LGS.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
1 \cdot x_1 & - & 1 \cdot x_2 & + & 1 \cdot x_3 & + & 3 \cdot x_4 & = & 4 \\
1 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 1 \cdot x_3 & + & 2 \cdot x_4 & = & 0 \\
1 \cdot x_1 & - & 1 \cdot x_2 & - & 1 \cdot x_3 & + & 1 \cdot x_4 & = & 2 \\
2 \cdot x_1 & - & 1 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & + & 5 \cdot x_4 & = & 4
\end{array}$$

(b) Wieviele der vier Gleichungen können entfallen, ohne dass sich der Informationsgehalt des LGS reduziert (bzw. die Lösungsmenge verändert)?

T 21

Lösen Sie simultan das folgende lineare Gleichungssystem für die beiden angegebenen Zielvektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$

$$\begin{array}{rcrcrcl|r|r|}
 & & & & & & & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\
3 \cdot x_1 & - & 1 \cdot x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & & 1 & -1 \\
2 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 1 \cdot x_3 & = & & 1 & -1 \\
1 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & & 1 & 2
\end{array}$$

T 22

Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

T 23

Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlußtableau eines simultan durchgeführten Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b und L_c der zugehörigen linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ax = c$

$$A \left\{ \begin{array}{ccc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & b & c \\
\hline
2 & 3 & 4 & 2 & -1 \\
4 & 3 & 2 & 0 & 3 \\
1 & 0 & -1 & 2 & 2
\end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \text{Algorithmus} \\ \longrightarrow \ \ldots \ \longrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c|c}
x_1 & x_2 & x_3 & b^* & c^* \\
\hline
1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 2 & 0 & -5/3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

T 24

(a) Bei Aufgabe T 17 (b) sei umgekehrt ein Rohstoffvorrat $R = \begin{pmatrix} 35 & 13 \end{pmatrix}^T$ vorgegeben. Geben Sie ein Produktionsziel an, das genau mit dem Vorrat R auskommt. Ist dies die einzige Lösung?

(b) Wie ist die Gleichung $M_{\text{RE}} \cdot E = R$ hier auch allgemein lösbar (ggf. Inverse mit dem GJ-Algorithmus berechnen)?

T 25

Führen Sie für die folgenden Tabellen den GJ-Algorithmus durch.

	x_1	x_2	x_3	b	c	d
A	1	2	3	4	5	6
A	2	3	4	5	6	7
A	3	4	5	6	7	8

EGK: x_1	x_2	x_3	b^*	c^*	d^*
1	0	−1	−2	−3	−4
0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0

Geben Sie dann alle Fragestellungen an, deren Beantwortung Sie am Schlußtableau ablesen können und ggf. die Antwort.

(a) Lösung der LGSe $Ax = b,\ Ax = c,\ Ax = d$, und hierzu jeweils

  (a1) Anzahl der überflüssigen Gleichungen des LGS

  (a2) Anzahl der frei wählbaren Variablen

  (a3) Lösungsmenge

(b) Lösung der Matrixgleichung $A \cdot X = B$, wobei $B := (d|b|c)_{3\times 3}$

(c) Rang der Matrizen $A, (A|b), (A|c), (A|d)$

(d) Lineare Unabhängigkeit der Spalten (Zeilen) von A

(e) Invertierbarkeit von A und ggf. die Inverse A^{-1}

T 26

Wie Aufgabe T 25 mit

	x_1	x_2	x_3	b	c	d
A	1	2	3	1	0	0
A	4	5	9	0	1	0
A	7	8	6	0	0	1

EGK: x_1	x_2	x_3	b^*	c^*	d^*
1	0	0	−14/9	4/9	1/9
0	1	0	13/9	−5/9	1/9
0	0	1	−1/9	2/9	−1/9

T 27

Wie Aufgabe T 25 mit

	x_1	x_2	x_3	b	c	d
	1	1	a	0	0	1
A	0	1	1	1	0	0
	0	0	1	0	1	0

EGK: x_2	x_3	x_1	b^*	c^*	d^*
1	0	0	-1	$1-a$	1
0	1	0	1	-1	0
0	0	1	0	1	0

T 28

Wie Aufgabe T 25 mit

	x_1	x_2	x_3	b	c	d
	1	1	1	1	1	0
A	0	1	0	1	0	0
	1	0	1	0	1	0

EGK: x_1	x_2	x_3	b^*	c^*	d^*
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0

A 24 *Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen*

Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$, falls

(a) $a_n := \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ (b) $a_n := -\left(\frac{1}{n}\right)^r$ (für $r \in \mathbb{Q} \cap]0,\infty[$)

(c) $a_n := c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + d$ (für $c, d \in \mathbb{R}$) (d) $a_n := c \cdot 2^n$ (für $c \in \mathbb{R}$)

(e) $a_n := \frac{d}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - e}$ (für $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

A 25 *Rechenregeln für Quotienten von Folgen*

Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$, für $n \to \infty$

(a) $a_n = \frac{n^3-2n^2+5}{4n^3-7n}$

(b) $a_n = \frac{5n^{4/5}-n^{3/4}}{3n^{5/6}+2n^{2/3}}$

(c) $a_n = \frac{2n^2+6+5\cdot n^3}{10n^3-17n^4+37}$

A 26 *Regeln für Grenzwerte zusammengesetzter Funktionen*

Bilden Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to3} \sqrt{x+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to3} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2}$ (c) $\lim\limits_{x\to2} (x+1)\cdot e^{2\cdot(x-2)}$ (d) $\lim\limits_{x\to0} \ln\left(e^2+x\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{x-1}+e^{1-x}-2}{(x-1)^2}$ (f) $\lim\limits_{x\to1} (e^{x-1}+e^{1-x}-2)\cdot(x-1)^2$

(g) $\lim\limits_{x\to0} \left((x+1)^3-3x^2-3x-1\right)$ (h) $\lim\limits_{x\to0} \left((x^2+x+1)^2-3x^2-2x-1\right)$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x-x^2}{x-2x^2}$ (j) $\lim\limits_{x\to1} \frac{(x+1)^3-3x^2-3x-1}{(x^2+x+1)^2-3x^2-2x-1}$

Untersuchen Sie, ob für die folgenden Funktionen $f(x)$ der Grenzwert in den „Nahtstellen“ existiert, und bestimmen Sie ihn gegebenenfalls.

(k) Nahtstelle “$x = 3$“ und

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{für } 0 \le x \le 3 \\ \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2} & \text{für } 3 < x \le 5 \end{cases}$$

(l) Nahtstelle “$x = -2$“ und

$$f(x) = \begin{cases} (4\cdot x)^{1/3} & \text{für } -4 \le x < -2 \\ (x+1)\cdot e^{2(x+2)} & \text{für } -2 \le x \le 3 \end{cases}$$

T 29 *Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen*

Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$, für $n \to \infty$

(a) $a_n = 4 - \frac{7}{\sqrt{n^5}} + (\sqrt{n})^{\,3}$ (b) $a_n = \left(4 - \frac{7}{\sqrt{n^5}} + (\sqrt{n})^{-3}\right) \cdot \left(n^{-3/4} - 2 \cdot n^{-1/4} + \frac{5}{n^2} + 7\right)$

(c) $a_n = \dfrac{n^3 - 2n^2 + 5}{4n^3 - 7n}$ (d) $a_n = \dfrac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$ (e) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{2}$

(f) $a_n = \dfrac{n^{3/4} - 2n^{5/4} + 5n^{-1/2} - 7n^{3/2}}{4n^{3/2} - 7n^{-1} + n^{4/3}}$

T 30 *Rechenregeln für Grenzwerte zusammengesetzter Funktionen*

Bilden Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} 2 \cdot e^{(x+1)^2-4}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x^3 + e - 1)$

(c) $\lim\limits_{x\to 2} (x+2) \cdot e^{2\cdot(x-2)}$ (d) $\lim\limits_{x\to -2} \left(|4 \cdot x|^{1/3}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} (x+1)\ln(1+x^2)$ (f) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x+1)^2-2(1+x)}{x^2-3}$

(g) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x^3+x+1}{6x^3-3x^2-2x-1}$ (h) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)^3-3x^2-3x-1}{(x^2+x+1)^2-3x^2-2x-1}$

(i) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1+1/x}{\ln x}$ (j) $\lim\limits_{x\to 1-} \frac{1+1/x}{\ln x}$ (k) $\lim\limits_{x\to 1+} \frac{1+1/x}{\ln x}$

Untersuchen Sie, ob für die folgenden Funktionen $f(x)$ der Grenzwert in den „Nahtstellen“ existiert, und bestimmen Sie ihn gegebenenfalls.

(l) Nahtstelle “$x = 1$“ und

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{(x+1)^2-4} & \text{für } 0 \le x < 1 \\ \ln(x^3 + e - 1) & \text{für } 1 \le x \le 5 \end{cases}$$

(m) Nahtstelle “$x = -2$“ und

$$f(x) = \begin{cases} (4 \cdot |x|)^{1/3} & \text{für } -3 \le x < -2 \\ 2 + \ln(3 + x) & \text{für } -2 \le x \le 2 \end{cases}$$

A 27 *Ableitungen*

Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $g(x) = \frac{x^3+2\cdot x+2}{x^2+8}$ (b) $g(x) = 4 \cdot x^5 - 3\ln x + \frac{2}{x^4}$

(c) $g(x) = x^2 \cdot e^x$ (d) $g(x) = \frac{\ln x}{e^x}$

(e) $g(x) = e^{1-(1+x)^2}$ (f) $g(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ (g) $g(x) = \left(\ln x\right)^2$

A 28 *Ableitungen*

Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen

(a) $g(x) = (1+x)^{3/2} \cdot \ln\left(e^2 \cdot (1+x)^{3/2}\right)$ für $x > 0$ (b) $g(x) = e^{1-(1+x)^2}$

(c) $g(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ (d) $g(x) = \left(\ln x\right)^2$

A 29 *Elastizität, Proportionalitätsfaktor*

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = e^{0.004\cdot x^2}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit von den Transportkosten $x > 0$.

(a) Wie elastisch sind die Herstellungskosten in der Basisstelle $x_0 = 10$?

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Herstellungskosten an der Basisstelle $x_0 = 10$, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 10% vermindert.

A 30 *Elastizität, Proportionalitätsfaktor*

Bestimmen Sie die Elastizität $\mathcal{E}^f(x)$ der Funktion $f(x) = 3x^2 + xe^{1-x}$. Mit welchem Faktor überträgt sich (ungefähr) eine relative Änderung von $x_0 = 1$ um $p\%$ auf die relative Änderung des Funktionswertes?

A 31 *Monotonieverhalten von differenzierbaren Funktionen*

Gegeben sie die Funktion $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten dieser Funktion über die Definitionsbereiche

(a) $D(f) = [-4,-1]$ (b) $D(f) = [1,4]$ (c) $D(f) = [2,4]$ (d) $D(f) = [0.5,4]$

A 32 *Optimierung von differenzierbaren Funktionen*

Gegeben $f(x) = 0.1 \cdot x^3 + 0.6 \cdot x^2 - 1.5 \cdot x + 0.5$ Bestimmen Sie jeweils alle lokalen und globalen Extrempunkte (lokale und globale Extremstellen sowie zugehörige Funktionswerte) von f über die Definitionsbereiche

(a) $D(f) = [-6, 2]$ (b) $D(f) = [-3, 2]$ (c) $D(f) = [-3, 0]$

A 33 *Optimierung von differenzierbaren Funktionen*

Gegeben $f(x) = e^x \cdot \left(x^2 - 4 \cdot x + 1\right)$ mit $D(f) = [0, 4]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben! f hat die Ableitung $f'(x) = e^x \cdot \left((x-1)^2 - 4\right)$.

(a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (lokale Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

(b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte).

T 31 *Ableitungen*

Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $g(x) = \frac{1}{5\sqrt{x^6}}$ (b) $g(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-2}$

(c) $g(x) = 5 \cdot e^x - \frac{1}{x^2}$ (d) $g(x) = x^2 \cdot \ln x$

(e) $g(x) = (7-x)e^{1-x^2}$ (f) $g(x) = (1+x)\ln(1+x)$

(g) $g(x) = \ln(x^4+2)$ (h) $g(x) = 2 \cdot e^{(x+1)^2-4}$

T 32 *Ableitungen*

Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen

(a) $g(x) = (7-x)e^{1-x^2}$ (b) $g(x) = (1+x)\ln(1+x)$ (c) $g(x) = 3x^2 + xe^{1-x}$

(d) $g(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-2}$ (e) $g(x) = \ln(x^4+2)$ (f) $g(x) = \big(\ln(x+1)\big)^2$

T 33 *Elastizität, Proportionalitätsfaktor*

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = e^{0.005 \cdot x^2 + 0.05 \cdot x}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit vom Rohstoffpreis $x > 0$.

(a) Wie elastisch sind die Herstellungskosten in der Basisstelle $x_0 = 10$?

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Herstellungskosten an der Basisstelle $x_0 = 10$, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 10% vermindert.

T 34 *Elastizität, Proportionalitätsfaktor*

Bestimmen Sie die Elastizität $\mathcal{E}^f(x)$ der Funktion $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x} \cdot e^x$. Mit welchem Faktor überträgt sich (ungefähr) eine relative Änderung von $x_0 = 1$ um p% auf die relative Änderung des Funktionswertes?

T 35a *Monotonieverhalten von differenzierbaren Funktionen*

Gegeben sie die Funktion $f(x) = (1-x) \cdot e^{3-x}$. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten dieser Funktion über die Definitionsbereiche

(a) $D(f) = [0,6]$ (b) $D(f) = [-1,1]$ (c) $D(f) = [-1,2]$ (d) $D(f) = [3,10]$

T 35b *Optimierung von Funktionen*

Bestimmen Sie jeweils die globalen Extrempunkte von f (Extremstellen und deren Funktionswerte) über die angegebenen Definitionsbereiche

(a) $f(x) = 0.25 \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 + 1$,
$D(f) = [1,4],\ D(f) = [-1,4],\ D(f) = [-1,1],\ D(f) = [3,4]$

(b) $f(x) = (x+1)/(x^2+3)$, $D(f) = [0,3],\ D(f) = [-4,3],\ D(f) = [2,3]$

(c) $f(x) = (1+x^2)\, e^{1-x} - x/2$, $D(f) = [0,2]$

(d) $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$, $D(f) = [0,2]$

T 36 *Optimierung differenzierbarer Funktionen*

Gegeben $f(x) = e^{(x-2)^4 - 4\cdot x}$ mit $D(f) = [0,4]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = e^{(x-2)^4 - 4\cdot x} \cdot \big(4 \cdot (x-2)^3 - 4\big)$.

(a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (lokale Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

(b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte).

A 34 *Stammfunktionen, HDIR, ISF*

Gegeben sei die Funktion $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x^{2/3} & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 4/5 & \text{für } 1 \le x \le 2 \\ 6/x^2 - 1 & \text{für } 2 < x \le 3 \end{cases}.$$

(a) Berechnen Sie die Fläche (zwischen x-Achse und Funktionskurve) unter der Funktion f.

(b) Bestimmen Sie die Funktion $F(x) := F(0) + \int_0^x f(t)\, dt$ für $x \in [0, 3]$.

(c) Berechnen Sie an den Stellen, wo möglich, die Ableitungen der Funktion F aus (b).

A 35 *Stammfunktionen, HDIR*

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale

(a) $\int_{1/2}^{1} \left(4 \cdot t^3 - 2/t^3\right)\, dt$ (b) $\int_1^{e^2} 3 \cdot t^{-1}\, dt$

(c) $\int_0^1 \left(4 \cdot e^{4 \cdot t} + 3 \cdot t^2\right)\, dt$ (d) $\int_1^{e^2} \ln(2 \cdot t)\, dt$ (e) $\int_{-1}^{1} |t|\, dt$

A 36 *Stammfunktionen*

Berechnen Sie die bestimmten Integrale, wobei $0 < a < 1$ und $b > 1$ fix:

(a) $\int_1^b 2/t^3\, dt$ (b) $\int_0^b 2 \cdot e^{-\lambda t}\, dt$, wobei $\lambda > 0$ fix (c) $\frac{1}{2} \int_a^1 t^{-1/2}\, dt$

A 37 *Uneigentliche Integration*

Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale:

(a) $\int_1^\infty 2/t^3\, dt$ (b) $\int_0^\infty 2 \cdot e^{-\lambda t}\, dt$, wobei $\lambda > 0$ fix (c) $\frac{1}{2} \int_0^1 t^{-1/2}\, dt$

A 38 *Lineare Substitution*

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale.

(a) $\int_{56}^{60} (16 - x/4)^3\, dx$ (b) $\int_{-1}^{(e-4)/3} \ln(3x + 4)\, dx$ (c) $\int_1^3 1/|x + 3|\, dx$

T 37 *Stammfunktionen, HDIR, ISF*

Gegeben Sei die stückweise stetige Funktion $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot (x^2 + 1) & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 5 & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 3/x & \text{für } 1 < x \leq 2. \end{cases} .$$

(a) Berechnen Sie die Fläche (zwischen x-Achse und Funktionskurve) unter der Funktion f.

(b) Bestimmen Sie die Funktion $F(x) := F(-1) + \int_{-1}^{x} f(t)\, dt$ für $x \in [-1, 2]$.

(c) Berechnen Sie an den Stellen, wo möglich, die Ableitungen der Funktion F aus (b).

T 38 *Stammfunktionen, HDIR*

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

(a) $\int_{-1/2}^{0} e^{1+2\cdot t}\, dt$ (b) $\int_{1}^{4} \left(\sqrt{t} - t^{3/2}\right)\, dt$

(c) $5 \cdot \int_{1}^{8} \sqrt[3]{t}\, dt$ (d) $\int_{1}^{e^3} \ln(t^n)\, dt$ für $n \in \mathbb{N}$ (e) $\int_{-2}^{1} |t|^3/3\, dt$

T 39 *Stammfunktionen, HDIR*

Berechnen Sie die bestimmten Integrale, wobei $0 < a < 1$ und $b > 1$ fix:

(a) $\int_{0}^{b} 3e^{-3t}\, dt$ (b) $\int_{1}^{b} t^{-2}\, dt$ (c) $\frac{1}{4} \int_{a}^{1} t^{-3/4}\, dt$

T 40 *Uneigentliche Integration*

Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale:

(a) $\int_{0}^{\infty} 3e^{-3t}\, dt$ (b) $\int_{1}^{\infty} t^{-2}\, dt$ (c) $\frac{1}{4} \int_{0}^{1} t^{-3/4}\, dt$

T 41 *Lineare Substitution*

Berechnen Sie die bestimmten Integrale:

(a) $\int_{5}^{13} (2t - 1)^{-1/2} dt$ (b) $\int_{-12}^{1} (-2t + 3)^{1/3} dt$ (c) $\int_{-2+\ln 2}^{1+\ln 2} e^{|t+1|}\, dt$

A 39 *Partielle Ableitungen*

Berechnen Sie für die Funktion f die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

(a) $f(x,y) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x \cdot y^2 + y^4 + 16$ (b) $f(x,y) = (1+y) \cdot e^{x-1}$ (jeweils $x, y \in \mathbb{R}$)

A 40 *Partielle Elastizitäten*

Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x,y) = 2 \cdot x^{1/2} + 4 \cdot y^{1/2}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Kapital- und Arbeitselastizität an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (100, 400)$. Wie elastisch sind die separaten Änderungseffekte bei Kapital- und Arbeitseinsatz an der angegebenen Basisstelle?

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Kapitaleinsatz um 50% erhöht und der Arbeitseinsatz um 30% vermindert?

A 41 *Totales Differential, partielle Elastizitäten*

Betrachtet wird die Funktion

$$f(x,y) = y + x^{1/2} \cdot 3y^{1/2} \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

(a) Berechnen Sie das totale Differential der Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) = (4, 9)$.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der Basisstelle $(4, 9)$, wenn sich dort die x-Variable um $+1\%$ verändert und die y-Variable um 2% verringert.

(c) Durch welchen Wert des totalen Differentials in $(4, 9)$ kann ein Proportionalitätsfaktor für die approximative absolute Funktionswertänderung im Verhältnis zur Änderung vom Basispunkt $(4, 9)$ zu $(4.04, 8.82)$ beschrieben werden? Berechnen Sie diesen Wert des totalen Differentials, um einen Näherungswert für $f(4.04, 8.82)$ zu finden.

T 42 *Partielle Ableitungen*

Berechnen Sie für die Funktion f die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

(a) $f(x, y) = 4 \cdot x^3 - 3 \cdot y^2$ (b) $f(x, y) = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 6 \cdot y^3$ (jeweils $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$)

(c) $f(x, y) = (x + y) \cdot e^{x \cdot y}$ (d) $f(x, y) = (x \cdot y) \cdot e^{x+y}$ (jeweils $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$)

(e) $f(x, y) = \ln(x \cdot y + 1)$ (f) $f(x, y) = \ln(x + y^3)$ (jeweils $x > 0, y > 0$)

T 43 *Partielle Elastizitäten*

Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = 100 \cdot x^{3/2} \cdot y^{1/2}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit von Rohstoffpreis $x > 0$ und Transportkosten $y > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Rohstoffpreis- und Transportkostenelastizität an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (50, 10)$. Wie elastisch sind die separaten Änderungseffekte für die Herstellungskosten bezüglich Rohstoffpreis und Transportkosten an der angegebenen Basisstelle?

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 2% vermindert und die Transportkosten um 8% erhöhen?

T 44 *Totales Differential, partielle Ableitungen, partielle Elastizitäten*

Berechnen Sie für die Funktion $f(x, y) = ln(x^{2/5} \cdot y^{3/5})$

(a) die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y und das totale Differential in den Punkten $(1, e), (1, 1)$;

(b) die partielle Elastizitäten im Punkt $(x_0, y_0) = (1, e)$;

(c) die approximative relative Änderung des Funktionswertes, wenn im Punkt $(x_0, y_0) = (1, e)$ der x-Wert um 10% erhöht und der y-Wert um 5% vermindert wird;

(d) die Tangentialebene zu f im Ausgangspunkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ und damit einer Näherung für den Funktionswert $f(1.1, 0.9)$. Durch welchen Wert des totalen Differentials in $(1, 1)$ wird bei dieser Näherung ein Proportionalitätsfaktor für die entsprechende absolute Funktionswertsänderung beschrieben?

T 45 *Cobb-Douglas-Funktion*

Untersucht werden soll die allgemeine Funktion $f(x,y) = x^{\alpha} \cdot y^{1-\alpha}$, wobei $0 < \alpha < 1$ fix. Diese Funktion ist in der Mikroökonomie bekannt unter dem Namen *Cobb-Douglas-Funktion*. Finden Sie eine „α-Regel“ bei diesem Funktionstyp für die partiellen Elastizitäten.

> Falls eine (Teil-)Aufgabe dieses Typs in der Klausur vorkommt, reicht es nicht, als „Lösung“ nur eine α-Regel aufzuschreiben. Sie können aber z.B. die Aufgabe allgemein mit α lösen und danach das konkrete α einsetzen.

Aufgaben 3D-Extrema

Nicht vergessen: Bei der Bestimmung der stationären Stellen die ermittelten Stellen daraufhin prüfen, ob sie zum vorher festgelegten Variablenbereich (Definitionsbereich) der zu untersuchenden Funktion gehören.

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extremwerte und Sattelpunkte (Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelpunktstellen *und* die jeweils zugehörigen Funktionswerte)

A 42

$$f(x,y) = 3/2 + \ln\big((1+2x)(1+y)^2\big) - x^2 - y \qquad (x > 0, y > 0)$$

A 43

$$f(x,y) = x^2 - y^3 - 3xy \qquad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$$

T 46

(a) $f(x,y) = 2 - x^2/2 - y^4/4 + xy \qquad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$

(b) $f(x,y) = x^2 - y^3 + 3xy \qquad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$

(c) $f(x,y) = 4 + y^4/4 + x^2/2 - 2xy \qquad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$

(d) $f(x,y) = 3x^2(1-y) + 4y^3 \qquad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$

T 47

(a) $f(x,y) = xye^{2x+y} \qquad (x > 0, y > 0)$

(b) $f(x,y) = xye^{-2x-y} \qquad (x > 0, y > 0)$

Aufgaben 3D-Extrema unter Gleich-Null Nebenbedingung

A 44

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokale Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x,y) = 4 \cdot x^3 + 2 \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $6 \cdot x + y = 12$

(b) $f(x,y) = 6 \cdot x + 4 \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $x^3 + 2 \cdot y = 5$

(c) $f(x,y) = x^3 \cdot e^{y+2}$ $(x > 0, y \in \mathbb{R})$ unter NB $x + y = 1$

T 48

An welchen Stellen können die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) lokale Extrema annehmen? Welche Art von lokalem Extremum liegt jeweils vor? Welche Funktionswerte werden angenommenn?

(a) $f(x,y) = x \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $x - 3 \cdot y = 24$

(b) $f(x,y) = x^2 + 2 \cdot y^2$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $x + y = 12$

(c) $f(x,y) = 2 \cdot x^{1/2} + 20 \cdot y$ $(x > 0, y \in \mathbb{R})$ unter NB $x + 20 \cdot y = 21$

T 49

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokalen Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x,y) = (1/5) \cdot x^5 + 2 \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $2 \cdot x + 4 \cdot y = 10$

(b) $f(x,y) = x^5 + 10 \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $8 \cdot x + y = 4$

T 50

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokalen Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x,y) = 4 \cdot x + 2 \cdot y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $2 \cdot x^2 + y^2 = 12$

(b) $f(x,y) = y \cdot x^2$ $(x, y \in \mathbb{R})$ unter NB $2 \cdot x + y = 9$

(c) $f(x,y) = y^3 \cdot e^{x+2}$ $(x \in \mathbb{R}, y > 0)$ unter NB $x + y = 1$

Z 1

An welchen Stellen können die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) lokale Extrema annehmen? Welche Art von lokalem Extremum liegt vor? Welche Funktionswerte werden angenommen?

(a) $f(x, y) = x^2 - 2 \cdot x \cdot y$ unter NB $\quad y = 2 \cdot x - 6$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 1$ unter NB $\quad 2 \cdot x + y = 12$

(c) $f(x, y) = x + 20 \cdot y$ unter NB $\quad x^{1/2} + y = 30$

Ergebniskontrolle:

zu (a):

- einziger stationärer Punkt $P1 = (2, -2)$ mit $\lambda = -4$
- $D(2, -2, -4) = -6 < 0$, also $(2, -2)$ lokales Maximum von f unter NB.

zu (b):

- einziger stationärer Punkt $P1 = (5, 2)$ mit $\lambda = -4$
- $D_0(5, 2, -4) = 10 > 0$, also $(5, 2)$ lokales Minimum von f unter NB.

zu (c):

- einziger stationärer Punkt $P1 = (100, 20)$ mit $\lambda = -20$
- $D(100, 20, -20) = 5/1000 > 0$, also $(100, 20)$ lokales Minimum von f unter NB.

Z 2

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokale Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x, y) = x + y^3$ unter NB $\quad 2 \cdot x + 6 \cdot y = 8$

(b) $f(x, y) = 4 \cdot x + y^3$ unter NB $\quad x + 3 \cdot y = 5$

(c) $f(x, y) = 9 \cdot x + y^3$ unter NB $\quad x + 3 \cdot y = 6$

Ergebniskontrolle:

zu (a):

- stationäre Punkte $P1 = (7, -1)$ und $P2 = (1, 1)$ mit $\lambda = -1/2$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
  - $D(7, -1, -1/2) = -24 < 0$, also $(7, -1)$ lokales Maximum von f unter NB.
  - $D(1, 1, -1/2) = 24 > 0$, also $(1, 1)$ lokales Minimum von f unter NB.

zu (b):

- stationäre Punkte $P1 = (11, -2)$ und $P2 = (-1, 2)$ mit $\lambda = -4$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
  - $D(11, -2, -4) = -12 < 0$, also $(11, -2)$ lokales Maximum von f unter NB.
  - $D(-1, 2, -4) = 12 > 0$, also $(-1, 2)$ lokales Minimum von f unter NB.

zu (c):

- stationäre Punkte $P1 = (15, -3)$ und $P2 = (-3, 3)$ mit $\lambda = -9$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
  - $D(15, -3, -9) = -18 < 0$, also $(15, -3)$ lokales Maximum von f unter NB.
  - $D(-3, 3, 9) = 18 > 0$, also $(-3, 3)$ lokales Minimum von f unter NB.

Z 3

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen (NB) die lokale Extrema mit zugehörigem Funktionswert.

(a) $f(x, y) = 4 \cdot x + 8 \cdot y$ unter NB $\quad 2 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 = 6$

(b) $f(x, y) = x + y$ unter NB $\quad x^2 + 2 \cdot y^2 = 24$

Ergebniskontrolle:

zu (a):

- stationäre Punkte $P1 = (-1, -1)$ mit $\lambda = 1$ und $P2 = (1, 1)$ mit $\lambda = -1$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
  - $D(-1, -1, 1) = 1 \cdot 4 \cdot (-8)^2 + 0 + 1 \cdot 8 \cdot (-4)^2 > 0$, also $(-1, -1)$ lokales Minimum von f unter NB.
  - $D(1, 1, -1) = (-1) \cdot 4 \cdot 8^2 + 0 + (-1) \cdot 8 \cdot 4^2 < 0$, also $(1, 1)$ lokales Maximum von f unter NB.

zu (b):

- stationäre Punkte $P1 = (-4, -2)$ mit $\lambda = 1/8$ und $P2 = (4, 2)$ mit $\lambda = -1/8$
- Berechnung von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für alle stationären Punkte
  - $D(-4, -2, 1/8) = 48 > 0$, also $(-4, -2)$ lokales Minimum von f unter NB.
  - $D(4, 2, -1/8) = -48 < 0$, also $(4, 2)$ lokales Maximum von f unter NB.

Bezeichnung: G = Geldeinheit/Stückelung (z.B. 1G = 1000 Euro)

Eine Skizze des zeitlichen Ablaufs (Zeitpunkte, Zahlungen, Faktoren) kann bei fast allen Aufgaben sehr hilfreich sein.

A 45 *Zinseszinsrechnung, Zinsstaffel*

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

(a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_4 um 60% über dem Anfangswert K_0 liegt?

(b) Gegeben: $i = 25\%$ und ein Zielwert K_x, der 60% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

(c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $20\%, 20\%, 0\%, 44\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.6^{\frac{1}{4}} \approx 1.13$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.6 \approx 0.47$, $144^2 = 20736$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

A 46 *Jährliche Zinseszinsen*

Gefragt: Endwerte der gegebenen Anlageform $A - D$
Barwerte (nur bei Anlageformen ohne Zinsstaffel)
Effektiver Zinssatz bei Anlageform B

Geg.: Laufzeit $n = 2$ Jahre, Einzahlungen vorschüssig, jährliche Verzinsung

(A) 2 G zu Beginn mit $i = 3\%$;

(B) 2 G zu Beginn mit „Zinsstaffel“ $i_1 = 2\%,\ i_2 = 4\%$;

(C) 1 G jährlich mit „Zinsstaffel“ $i_i = 4\%;\ i_2 = 3\%$ bzw. $i_1 = 3\%,\ i_2 = 4\%$;

(D) 1 G jährlich mit $i = 3\%$ (konstant)

A 47 *Ratenendwert, Rentenbarwert*

Ein Betrag K soll – ohne Startkapital – jährlich vorschüssig über 10 gleiche Raten der Höhe A angespart werden um dann ab dem folgenden Jahr durch eine vorschüssige jährlich Rente der Höhe R in 5 Jahren aufgebraucht zu werden. Kalkulationszins $i = p\%$ (fest, aber zunächst nicht näher festgelegt).

Gegeben (als Ziel): Rentenhöhe $R > 0$

Gefragt:

(a) Ratenhöhe A in Abhängigkeit von R und q, wobei $q = 1 + i$, d.h. gefragt ist eine Gleichung $A =?$, wobei rechts vom Gleichheitszeichen nur die Symbole R und q auftreten (bitte hierbei möglichst gut zusammenfassen/auskürzen).

(b) Welcher Wert ergibt sich damit (approximativ) für A, wenn nun konkret $i = 4.5\%$ und $R = 56$ G festgelegt sind?

[Hilfswerte $1.045^5 \approx 1.25, 1045^{10} \approx 1.55, 1.045^{15} \approx 1.94$]

A 48 *Ratenkauf, jährliche Verzinsung*

Ratenkauf mit konstanter jährl. Rate A und jährl. Zinssatz i: Vertragsdauer n Jahre, der Vertrag beginnt mit Zahlung der ersten Rate und endet mit Zahlung der letzten Rate.

(a) Berechnen Sie den *Kauf-Endwert*, d.h. den Endwert des Ratenkaufs (Endwert einschl. der letzten Rate)

(b) Berechnen Sie den *Kauf-Barwert*, d.h. den Barwert des Ratenkaufs (Barwert einschl. der ersten Rate)

(c) Welche *relative* Preisveränderung bedeutet der Ratenkauf gegenüber der Einmal-Zahlung des Betrags $K = (n + 1) \cdot A$ zum Vertragsbeginn?

Bezeichnung: G= Geldeinheit/Stückelung (z.B. $1G = 1000$ Euro)

Eine Skizze des zeitlichen Ablaufs (Zeitpunkte, Zahlungen, Faktoren) kann bei fast allen Aufgaben sehr hilfreich sein.

T 51 *Zinseszinsrechnung, Zinsstaffel*

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

(a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 20% über dem Anfangswert K_0 liegt?

(b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 20% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

(c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel $10\%, 0\%, 10\%, 21\%, 10\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.2^{\frac{1}{5}} \approx 1.04$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $11^5 = 161051$, $\ln 1.1 \approx 0.1$

T 52 *Jährliche Verzinsung (Zinseszins)*

Gefragt: Endwerte der gegebenen Anlageform $A - D$
Barwerte (nur bei Anlageformen ohne Zinsstaffel)
Effektiver Zinssatz bei Anlageform B

Geg.: Laufzeit $n = 4$ Jahre, Einzahlungen vorschüssig, jährliche Verzinsung

(A) 10 G zu Beginn mit $i = 5\%$;

(B) 10 G zu Beginn mit „Zins-Staffel“ $i_1 = 4\%,\ i_2 = 5\%,\ i_3 = 5\%, i_4 = 6\%$

(C) 2.5 G jährlich mit $i = 6\%$ (konstant)

T 53 *Ratenendwert, Rentenbarwert*

Ein Betrag K soll – ohne Startkapital – jährlich vorschüssig über 10 gleiche Raten der Höhe A angespart werden um dann ab dem folgenden Jahr durch eine vorschüssige jährliche Rente der Höhe R in 5 Jahren aufgebraucht zu werden. Kalkulationszins $i = p\%$ (fest, aber zunächst nicht näher festgelegt).

Gegeben (als Ziel): Rentenhöhe $A > 0$

Gefragt:

(a) Rentenhöhe R in Abhängigkeit von A und q, wobei $q = 1+i$, d.h. gefragt ist eine Gleichung $R = ?$, wobei rechts vom Gleichheitszeichen nur die Symbole A und q auftreten (bitte hierbei möglichst gut zusammenfassen/auskürzen).

(b) Welcher Wert ergibt sich damit für A, wenn $i = 3\%$ und $R = 670$ G konkret festgelegt sind?

Zusatzfrage: Wenn die Ansparphase und die Rentenphase im Unterschied zu oben beide gleiche Dauer $n = 10$ haben, ergibt sich $R/A = 1.03^{10} \approx 1.34$, also $A = 670/1.03^{10} \approx 500$. Rechnen Sie dies nach und begründen Sie anhand einer Skizze, wie dies auch sofort (ohne zu rechnen) eingesehen werden kann.

[Hilfswerte $1.03^5 \approx 1.16, 1.03^{10} \approx 1.34, 1.03^{15} \approx 1.56$]

T 54 *Ratenkauf, jährliche Verzinsung*

Ratenkauf mit konstanter jährl. Rate A: Vertragsdauer 3 Jahre, der Vertrag beginnt mit Zahlung der ersten Rate und endet mit Zahlung der letzten Rate, Kalkulationssatz $i = 5\%$. Bei welcher Ratenhöhe A bedeutet der Ratenkauf eine Preiserhöhung von 3% gegenüber dem *Bar-Kaufwert* K (d.h. dem Barwert K des Ratenkaufs ▹ A 48 (b))?