Mathematik für Ökonomen — SS 2007 — Campus Duisburg

H. Hoch, Fachbereich Mathematik

Klausur Mathematik 1

17. Juli 2007, 08:30–10:30 Uhr (120 Minuten)

- *Erlaubte* ***Hilfsmittel****: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie ***Handy*** *oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muß* ***geheftet*** *bleiben.*
- *Bei* ***Klausurunterbrechung*** *müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher* ***keine vorzeitige Abgabe*** *möglich.*
- *Während der Klausur können* ***keine Fragen*** *zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

Die Klausur besteht aus ***6 Aufgaben*** *mit jeweils 4–5 erreichbaren Punkten*
und aus ***2 Aufgaben*** *(Nrn. 1 und 8) mit je 10–12 erreichbaren Punkten.*
Insgesamt sind **50** ***Punkte*** *erreichbar.*
Ab erreichten **23** ***Punkten*** *ist die Klausur bestanden,* ***gutes Gelingen!***

Matrikelnummer ____________________

NAME ____________________

Vornamen ____________________

Geburtsdatum ____________________

Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings teils ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.

Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $x - y \geq -1$

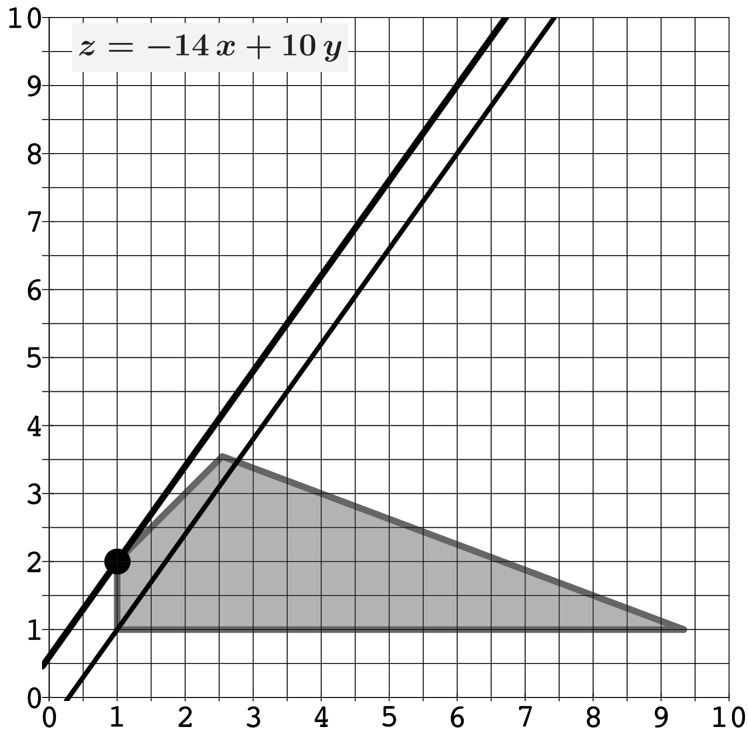
(2) $3x + 8y \leq 36$

(3) $y \geq 1$

(4) $x \geq 1$

Ergebniskontrolle

$$y \leq 1 + x \quad \text{und} \quad y \leq \tfrac{9}{2} - \tfrac{3}{8}x \quad \text{und} \quad y \geq 1 \quad \text{und} \quad x \geq 1$$



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = -14x + 10y}$ „halbgraphisch“ : *Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren, Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.*

Ergebniskontrolle

Zielgeradenschar in (x, y)-Koordinaten: $y = \frac{1}{10}z + \frac{7}{5}x$.
Der Koeffizient von z (bzw. der Koefiizient von y in der Zielfunktion) ist positiv, also bedeutet Maximierung von z eine parallele Verschiebung nach oben.

Rechnerisch: $x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad z_0 = 6$

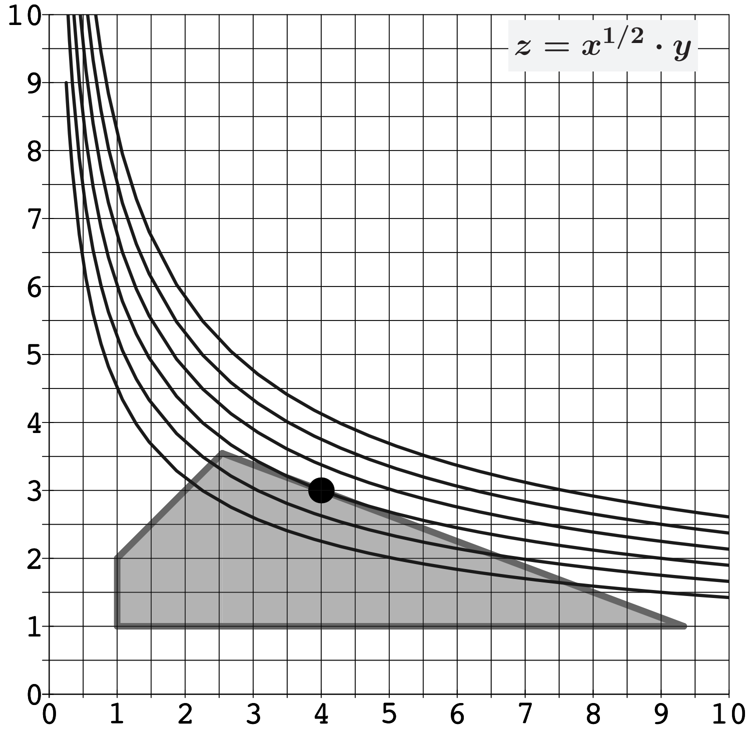
(x_0, y_0) ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Beschränkungslinien

$$(1)\ x - y = -1 \quad \text{und} \quad (4)\ x = 1$$

z.B. so: $1 = x = -1 + y$, also $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$
Maximalwert: $z_0 = -14\,x_0 + 10\,y_0 = 6$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = x^{1/2} \cdot y}$ „halbgraphisch“ : *Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalen z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren, Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 <u>rechnerisch</u> bestimmen.*

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) *korrekt* in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

Ergebniskontrolle

$x_0 = 4, \quad y_0 = 3, \quad z_0 = 6$
ergibt sich z.B. aus dem Einsetzen der Beschränkungsgeraden (2) $y = \frac{9}{2} - \frac{3}{8}x$ in die Zielfunktion:

$z = f(x) = x^{1/2}(\frac{9}{2} - \frac{3}{8}x) = \frac{9}{2}x^{1/2} - \frac{3}{8}x^{3/2}$ mit der Ableitung

$f'(x) = \frac{9}{4}\,x^{-1/2} - \frac{9}{16}\,x^{1/2} \quad (x > 0)$

$f'(x) = 0$ liefert $x = 4$, also die Maximalstelle (x_0, y_0)

mit $x_0 = 4$ und $y_0 = \frac{9}{2} - \frac{3}{8}x_0 = 3$ [offensichtlich: $(4, 3) \in$ Lösungsmenge]

Maximalwert: $z_0 = x_0^{1/2} \cdot y_0 = 4^{1/2} \cdot 3 = 6.$

Aufgabe 2 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[2] **(a)** **(a1)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^{2/3} - n^{1/2} + 7}{3n^{2/3} - 21} = ?$ **(a2)** $\sum_{i=0}^{31} 2^i = ?$

[3] **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2}\big(\frac{2}{3}\big)^k - \frac{4}{9}\big(\frac{1}{2}\big)^k = ?$ *Untere Summengrenze beachtet?*

Ergebniskontrolle

(a) **(a1)** $4/3$; **(a2)** $\dfrac{2^{32}-1}{2-1} = 2^{32} - 1$

(b) $\frac{1}{2}\big(\frac{2}{3}\big)^3 \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}\big(\frac{1}{2}\big)^3 \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2^3 \cdot 3}{2 \cdot 3^3} - \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 2^3} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

Aufgabe 3 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Eine endliche Folge von jährlichen Zahlungen a_i, $i = 1, \dots, n$, die um den konstanten Betrag $|d|$ zunehmen, soll sich in n Jahren zu einem Wert von $s_n = 400$ aufsummieren (z.B. bei einer einfachen Form der Abschreibung oder der Mittelbewirtschaftung).

(a) Wie errechnet sich s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $a_1 = 22$ und $|d| = 4$ werden festgelegt.
Was folgt für die Anzahl n? Und wie hoch ist die letzte Zahlung a_n?

Ergebniskontrolle

(a) $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d \qquad (= na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot |d|\,)$

(b) $a_1 = 22,\ d = 4,\ s_n = 400 \quad \Rightarrow \quad 400 = 22 \cdot n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4 = 22n + 2n^2 - 2n$

$\Rightarrow \quad n^2 + 10n - 200 = 0 \quad \Rightarrow \quad n \in \{-5 - 15, -5 + 15\} = \{-20, 10\}$,

also $n = 10$ mit $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 22 + 9 \cdot 4 = 58$.

[3] **(a)** Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{1\times 3}$$

(1) $A \cdot C$ **(2)** $A \cdot B$ **(3)** $(\mathbf{E}_{3\times 3} - A)^T$

[2] **(b)** Sortieren Sie mit einer Matrixmultiplikation die *Spalten* der Matrix A aus (a) *aufsteigend* nach ihrem *mittleren* Element.

Ergebniskontrolle

(a) **(1)** $A_{3\times 3} \cdot C_{1\times 3}$ nicht definiert **(2)** $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(3)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) „Spaltenpicker (1./3./2.)“: $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Bei einem zweistufigen Produktionsprozeß sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen M_{RZ} und M_{ZE} gegeben:

		Zwischenprod.	
		Z_1	Z_2
Rohstoffe	R_1	2	1
	R_2	1	1
	R_3	1	2

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischen-	Z_1	1	0	2
produkte	Z_2	2	1	2

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2, r_3) = (2, 3, 2)$.

[2] **(a)** Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

[2] **(b)** Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Rohstoffe	R_1	4	1	6
	R_2	3	1	4
	R_2	5	2	6

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \\ 18 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = 30 + 33 + 36 = 99$

Aufgabe 6 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins), ein Anfangswert $K_0 > 0$ und ein Zielwert K_x, der um 50% über dem Anfangswert liegen soll.

[2] **(a)** Gegeben: Laufzeit $n = 8$ (d.h. $K_x = K_8$). Erforderliche Rendite $\mathfrak{i} = p\% = ?$

[3] **(b)** Gegeben: $\mathfrak{i} = 2.5\%$. Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals $K_n \geq K_x$ erfüllt sein)

Hilfswerte: $1.025^{1/8} \approx 1.003,\ 1.05^{1/8} \approx 1.006,\ 1.25^{1/8} \approx 1.028,\ 1.5^{1/8} \approx 1.052,$
$\ln 2.5 \approx 0.916,\ \ln 1.5 \approx 0.405,\ \ln 1.25 \approx 0.223,\ \ln 1.025 \approx 0.025$

Ergebniskontrolle $K_x = 1.5 \cdot K_0$

(a) $1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+\mathfrak{i})^8 \ \Leftrightarrow\ 1+\mathfrak{i} = 1.5^{1/8} \approx 1.052 \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{i} \approx 0.052 = 5.2\%$

(b) $K_x = K_0 \cdot (1.025)^x \ \Leftrightarrow\ x = \dfrac{\ln(K_x/K_0)}{\ln(1.025)} = \dfrac{\ln(1.5)}{\ln(1.025)} \approx \dfrac{0.405}{0.025} = 16.2;\ \ n = \lceil x \rceil = 17$

Aufgabe 7

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen

Bestimmen Sie jeweils die x-Lösungsmenge:

[3] **(a)** $2 \leq \frac{6\,x}{x+2} \leq 3$ <u>und</u> $x > 0$

[1] **(b)** $e^{x(x-1)} = 1$

Ergebniskontrolle

(a) Wegen $x > 0$ ist $x + 2 > 0$, also:

$2 \leq \frac{6x}{x+2} \leq 3 \underset{x+2>0}{\Leftrightarrow} 2x + 4 \leq 6x \leq 3x + 6 \;\Leftrightarrow\; 4 \leq 4x$ und $3x \leq 6 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq x \leq 2$

(b) $e^{x(x-1)} = 1 \;\Leftrightarrow\; x(x-1) = 0 \; (= \ln 1) \;\Leftrightarrow\; x \in \{0, 1\}$

Aufgabe 8 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[7] **(a)** Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte.) *Geprüft wird (an einem einfachen Beispiel) die Beherrschung der Methode — eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.*

$$B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Probe gemacht?

Ergebniskontrolle

	x_1	x_2	x_3 =	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	*Protokollbsp.*
B_0	1	1	−1	1	0	0	*I*
	−1	1	1	0	1	0	*II*
	−2	2	0	0	0	1	*III*
	1	1	−1	1	0	0	**I**
	0	2	0	1	1	0	$II + 1 \cdot \mathbf{I}$
	0	4	−2	2	0	1	$III + 2 \cdot \mathbf{I}$
	1	0	−1	1/2	−1/2	0	$I - 1/2 \cdot \mathbf{II}$
	0	1	0	1/2	1/2	0	$1/2 \cdot \mathbf{II}$
	0	0	−2	0	−2	1	$III - 2 \cdot \mathbf{II}$
	1	0	0	1/2	1/2	−1/2	$I - 1/2 \cdot \mathbf{III}$
	0	1	0	1/2	1/2	0	*II*
	0	0	1	0	1	−1/2	$-1/2 \cdot \mathbf{III}$

Probe: $B_0^{-1} \cdot B_0 = E_{3\times3}$ oder $B_0 \cdot B_0^{-1} = E_{3\times3}$

$$B^{-1} = 2 \cdot (B_0)^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

[3] **(b)** Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines simultan durchgeführten Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmengen L_b und L_c der zugehörigen linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ax = c$.

$$\begin{array}{c|ccc|c|c} & x_1 & x_2 & x_3 & b & c \\ \hline \multirow{3}{*}{A} & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 & -5 & 1 \\ & 3 & 5 & 3 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c}\text{Gauß-Algo-} \\ \text{rithmus} \\ \longrightarrow \cdots \longrightarrow\end{array} \quad \begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b^* & c^* \\ \hline 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

[2] **(c)** $\mathbf{E}$ bezeichne die $n \times n$-Einheitsmatrix und H eine $n \times n$-Matrix, mit der die Matrix $(\mathbf{E} - H)$ invertierbar wird.
Lösen Sie mit Hilfe dieser Information die folgende Matrixgleichung *nach* X auf:

$$X - X \cdot H = \mathbf{E}$$

Ergebniskontrolle

(b) $A \cdot x = c$ ist nicht lösbar, da $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \neq 1$, $L_c = \emptyset$
Beim LGS $A \cdot x = b$ sind zwei der drei Variablen durch dieses LGS festgelegt, eine ist frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} x_1 = -3 - x_3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar} \end{array} \right\}$$

(c) $X - X \cdot H = \mathbf{E} \Leftrightarrow X \cdot (\mathbf{E} - H) = \mathbf{E} \Leftrightarrow X = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{E} - H)^{-1} \quad [= (\mathbf{E} - H)^{-1}]$