# Mathematik für Ökonomen — SS 2007 — Campus Duisburg

H. Hoch, Fachbereich Mathematik

## Klausur Mathematik 2

**17. Juli 2007, 11–13 Uhr (120 Minuten)**

- *Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  *Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muss **geheftet** bleiben.*
- *Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.*
- *Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

*Die Klausur besteht aus **5 Aufgaben** mit jeweils 4–6 erreichbaren Punkten und aus **3 Aufgaben** mit je 8–11 erreichbaren Punkten (Aufgaben 6–8).*
*Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.*
*Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!***

**Matrikelnummer** ____________________

**NAME** ____________________

**Vornamen** ____________________

**Geburtsdatum** ____________________

*Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:*

**Unterschrift** ____________________

### BITTE BEACHTEN

**Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings teilweise sehr ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.**

**Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.**
**Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.**

## Aufgabe 1 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Die folgende Funktion $f$ ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen $\alpha$ und $\beta$ rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 1$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha \cdot x}{1+x} & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \\ \alpha \cdot x^{-1/2} - \beta \cdot x & \text{für } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

*Ergebniskontrolle*

LGW in $x_0 = 1$: $\alpha/2$, Funktionswert in $x_0 = 1$ (FW): 1, RGW in $x_0 = 1$: $\alpha - \beta$

$f$ stetig in $x_0 = 1 \Leftrightarrow$ LGW=FW=RGW in $x_0$, d.h. $\alpha/2 = 1$ und $1 = \alpha - \beta$

also $f$ stetig in $x_0$ mit der Festlegung: $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

## Aufgabe 2 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Gegeben $f(x) = 3 - x \cdot e^{2-x}$ mit $D(f) = [0,\ 4]$. *Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!*
Die Funktion hat die Ableitung $f'(x) = -(e^{2-x} + xe^{2-x} \cdot (-1)) = e^{2-x}(x-1)$
und die lokale Minimalstelle $x = 1$ mit Wert $f(1) = 3 - e$.

[4] **(a)** Untersuchen Sie auf Basis dieser Informationen das Krümmungsverhalten (Konvexität/Konkavität) von $f$ und skizzieren Sie $f$.
*[Bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen; folgende Hilfswerte sind bereits eingetragen: $f(0) = 3$, $f(0.5) \approx 0.76$, $f(1) \approx 0.28$, $f(3.5) \approx 2.22$, $f(4) \approx 2.46$ ]*


*(Ersatzvorlage auf Anhangseite 1 oben links)*

*Ergebniskontrolle*

$f''(x) = -e^{2-x}(x-1) + e^{2-x} = e^{2-x}(2-x)$. Da $e^{2-x} > 0$, gilt:
Vorzeichen von $f''(x)$ = Vorzeichen von $(2-x)$ für alle $x \in D(f) = [0,4]$;

also $f''(x) \geq 0$ für $x \leq 2$, d.h. $f$ konvex über $[0,2]$,
und $f''(x) \leq 0$ für $x \geq 2$, d.h. $f$ konkav über $[2,4]$;
Wendepunkt an der Stelle $x = 2$ mit Wert $f(2) = 1$.

[2] **(b)** Bestimmen Sie die Elastizität $\mathcal{E}^f(x)$ der obigen Funktion $f$. Mit (ungefähr) welchem Faktor überträgt sich an der Basisstelle $x_0 = 2$ eine relative Erhöhung von $x$ um $p\%$ auf die relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ gegenüber $f(2)$?

*Ergebniskontrolle*

$\mathcal{E}^f(x) = x \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \dfrac{e^{2-x}(x-1)}{3 - x \cdot e^{2-x}}$; an der Basisstelle $x_0 = 2$ ist $\dfrac{df}{f} \approx \mathcal{E}^f(2) \cdot p\%$;

Faktor: $\mathcal{E}^f(2) = 2 \cdot \dfrac{f'(2)}{f(2)} = 2 \cdot \dfrac{1}{1} = 2$ (verdoppelt also die $p\%$).

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{x-1} + e^{1-x} + (2/x) + 2x - 6}{(x-1)^2}$

*Ergebniskontrolle*

Zweimal LHR $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1} + e^{1-x} + (2/x) + 2x - 6}{(x-1)^2}$

$$\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1} - e^{1-x} - (2/x^2) + 2}{2(x-1)} \overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1} + e^{1-x} + (4/x^3)}{2} = \frac{1+1+4}{2} = 3$$

## Aufgabe 4 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad $n = 2$) der Funktion $f(x) = x^{1/3}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ und damit eine Näherung für $f(1.3) = 1.3^{1/3}$.

*Ergebniskontrolle*

$f(1) = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \quad f'(1) = \frac{1}{3}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}, \quad f''(1) = -\frac{2}{9}$

$T_2^f(x;1) := f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot (x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2$

$1.3^{1/3} = f(1.3) \approx T_2^f(1.3;1) = 1 + \frac{1}{3}(0.3) - \frac{1}{9}(0.3)^2 = 1.09$

[*zum Vergleich:* $1.3^{1/3} \approx 1.09139$]

## Aufgabe 5 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

**Wahlmöglichkeit: Entweder (a) oder (b).** Sind beide Wahlmöglichkeiten bearbeitet, so werden zwar beide korrigiert, es zählt aber *nur das Maximum* der beiden Punktezahlen.

[4] **(a)** **Wahlmöglichkeit**: Newton-Verfahren.
Zu lösen ist (z.B. zur Berechnung einer Rendite $\mathfrak{i}_{\text{eff}} = x - 1$) eine Bestimmungsgleichung für $x$:

$$x^4 + 3x \overset{!}{=} 4.35$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von $x$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens, *d.h. gefragt sind: Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert* $x_0 = 1$, *eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (diese nicht ausrechnen).*

*Ergebniskontrolle*

$f(x) = x^4 + 3x - 4.3$, $f'(x) = 4x^3 + 3$; $\quad x_{n+1} = x_n - (\, f(x_n)/f'(x_n)\,)$; $x_0 = 1$;

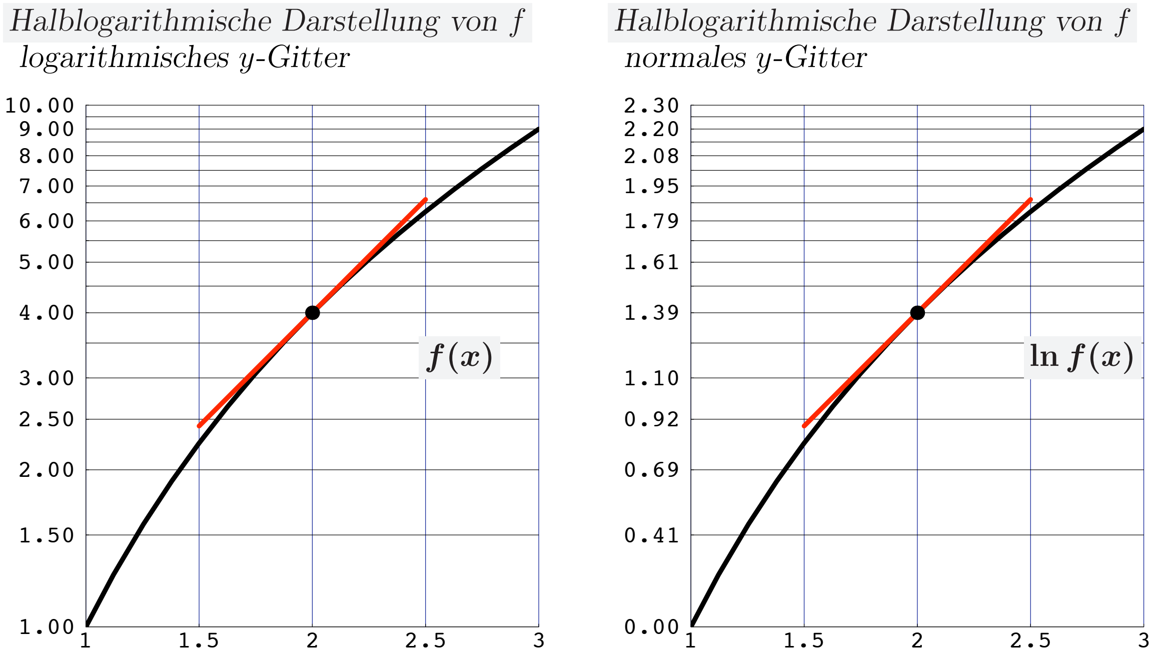
Erste Iteration: $x_1 = 1 - (\, f(1)/f'(1)\,) = 1 - (\,-0.35/7\,) = 1 + \frac{35}{7\cdot 100} = 1.05$;

Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - (\, f(x_1)/f'(x_1)\,) = 1.05 - (\, f(1.05)/f'(1.05)\,)$.

## (Aufgabe 5) *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

**Wahlmöglichkeit: Entweder (a) oder (b).** Sind beide Wahlmöglichkeiten bearbeitet, so werden zwar beide korrigiert, es zählt aber *nur das Maximum* der beiden Punktezahlen.

[4] **(b)** **Wahlmöglichkeit**: Wachstumsrate und Halblogarithmische Darstellung.
Gegeben $f(x) = x^2$, $D(f) = [1, 4]$.
Berechnen Sie für jedes $x_0 \in D(f)$ die (stetige) Wachstumsrate $W^f(x_0)$ von $f$ und skizzieren Sie *grob* den Verlauf von $g(x) = \ln(f(x))$ d.h. die Halblogarithmische Darstellung (normales <u>oder</u> logarithmisches $y$-Gitter) von $f$. In welcher Form taucht die Wachstumsrate $W^f(x_0)$ an der Basisstelle $x_0 = 2$ in diesem Diagramm auf?




*(Ersatzvorlagen auf Anhangseite 1 unten)*

*Ergebniskontrolle* $W^f(x) = f'(x)/f(x) = 2x/x^2 = 2/x$; $\ln f(x) = \ln x^2 = 2 \ln x$;
$W^f(2) = \frac{2}{2} = 1 =$ Tangentensteigung in $(2, \ln(f(2))) = (2, \ln 4)$

## Aufgabe 6

*Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[1] **(a)** Ändert sich der Wert des in (b) gefragten Integrals, wenn dort der Funktionswert $f(1) = \ln 2$ statt $f(1) = 1$ gesetzt wird?

*Ohne Begründung ankreuzen:* *Ja* ☐ *Nein* ☐

[3] **(b)** Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 f(t)\,dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 3 \cdot e^{-3\,t} & \text{für } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{für } t = 1 \\ 1/2 & \text{für } 1 < t \leq 2 \end{cases}$

Hilfswert: $e^{-3} \approx 1/20$

*Ergebniskontrolle*

(a) Nein

(b)
$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t)\,dt &= \int_0^1 3 \cdot e^{-3\,t}\,dt + \int_1^2 \tfrac{1}{2}\,dt = [-e^{-3\,t}]_0^1 + [\tfrac{1}{2}\,t]_1^2 \\ &= (\underbrace{-e^{-3}}_{\approx -1/20} - (-1)) + (1 - \tfrac{1}{2}) \approx \tfrac{19}{20} + \tfrac{10}{20} = \tfrac{29}{20} \qquad [= 1.45] \end{aligned}$$

[5] **(c)** Für $5 \leq x \leq 100$ sei $F(x) := F(5) + \int_5^x (4+t)^{1/2}\, dt$.

**(c1)** Berechnen Sie den Wert $F(77)$

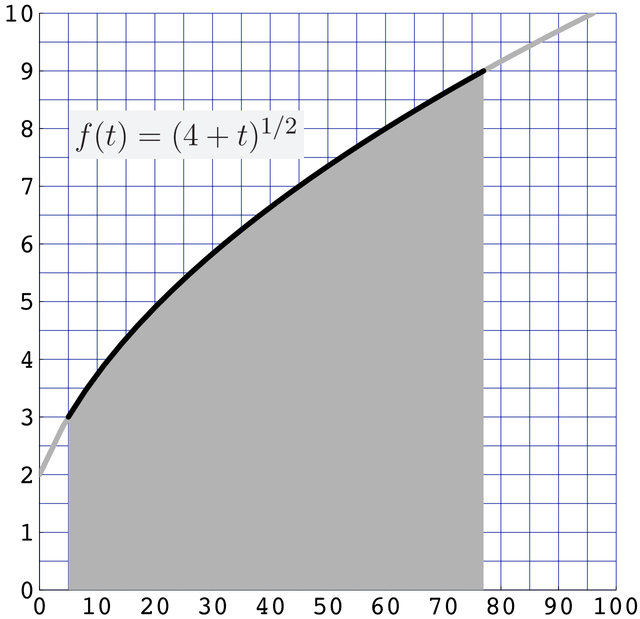
**(c2)** Skizzieren Sie *grob* das in c1) durch das Integral $\int_5^{77} (4+t)^{1/2}\, dt$ berechnete Flächenstück

*Ergebniskontrolle*

$F(77) = F(5) + \int_5^{77} (4+t)^{1/2}\, dt$, mit

$\int_5^{77} (4+t)^{1/2}\, dt = \frac{2}{3}[(4+t)^{3/2}]_5^{77} = \frac{2}{3}(81^{3/2} - 9^{3/2}) = \frac{2}{3}(9^3 - 3^3) \quad [= 468]$

Skizze: Typ „$\sqrt{x}$“ z.B. mit den Hilfspunkten $f(5) = 3$, $f(45) = 7$, $f(60) = 8$, $f(77) = 9$




*(Ersatzvorlage auf Anhangseite 1 oben rechts)*

## Aufgabe 7 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] **(a)** Gegeben sind die Funktion $f(x,y) = 3 - \ln(x) + xy^2e^{y-x}$ $(x > 0,\ y > 0)$ <u>und</u> ihre partiellen Ableitungen $f'_x(x,y) = -\frac{1}{x}+(1-x)y^2e^{y-x}$ und $f'_y(x,y) = xy(2+y)e^{y-x}$.

**(a1)** Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion $f$ an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (1,1)$, wenn sich dort die $x$-Variable um $-5\%$ verändert und die $y$-Variable um $+1\%$ verändert.

**(a2)** Die Abhängigkeit zwischen $x$ und $y$ sei auf dem konstantenNiveau $z$ gegeben durch eine implizite Darstellung mittels der obigen Funktion, d.h. $z = 3-\ln(x)+xy^2e^{y-x}$. Für die Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$ ist die Niveaubedingung $z = 4$ erfüllt. Berechnen Sie an dieser Stelle die Grenzrate der Substitution von $x$ durch $y$: $\frac{dy}{dx}(1,1) = \,?$

*Ergebniskontrolle*

**(a1)** $\frac{df}{f} \approx x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)} \cdot \frac{dx}{x_0} + y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)} \cdot \frac{dy}{y_0}$; $\frac{df}{f} \approx \frac{f'_x(1,1)}{f(1,1)} \cdot (-5\%) + \frac{f'_y(1,1)}{f(1,1)} \cdot (+1\%)$; $f'_x(1,1) = -1$, $f'_y(1,1) = 3$, $f(1,1) = 4$. Also $\frac{df}{f} \approx (-\frac{1}{4})(-5\%)+(\frac{3}{4})(+1\%) = +2\%$, d.h. Erhöhung von $f(1,1) = 4$ um ca. 2% auf $f(0.95, 1.01)$.

**(a2)** $\frac{dy}{dx}(x,y) = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)} = -\frac{-\frac{1}{x}+(1-x)y^2e^{y-x}}{xy(2+y)e^{y-x}}$; $\frac{dy}{dx}(1,1) = \frac{1}{3}$ entlang des Niveaus $z = 4$.

[5] **(b)** Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = 1 + x^2 \cdot e^{x-2y}$ $(x, y > 0)$
die partiellen Ableitungen $f'_x$, $f'_y$, sowie $f''_{xx}$, $f''_{yy}$ und $f''_{xy}$ (oder $f''_{yx}$).

*Ergebniskontrolle*

$f'_x(x,y) = 2 \cdot x \cdot e^{x-2y} + x^2 \cdot e^{x-2y}$ $[= x \cdot (2+x) \cdot e^{x-2y}]$

$f'_y(x,y) = (-2) \cdot x^2 \cdot e^{x-2y}$

$f''_{xx}(x,y) = 2 \cdot e^{x-2y} + 2 \cdot x \cdot e^{x-2y} + 2 \cdot x \cdot e^{x-2y} + x^2 \cdot e^{x-2y} = (2 + 4x + x^2) \cdot e^{x-2y}$

$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = (-2) \cdot (2 \cdot x \cdot e^{x-2y} + x^2 \cdot e^{x-2y})$ $[= (-2x) \cdot (2+x) \cdot e^{x-2y}]$

$f''_{yy}(x,y) = (-2) \cdot (-2) \cdot x^2 \cdot e^{x-2y} = 4 \cdot x^2 \cdot e^{x-2y}$

## Aufgabe 8 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[8] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = 3 - x + \ln(x) + \tfrac{1}{2} \cdot (x-2) \cdot (y-2)^2 \qquad (x > 0\,,\ y > 0)$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> *und* die zugehörigen Funktionswerte)

*Ergebniskontrolle*

$f'_x(x, y) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}(y-2)^2, \quad f'_y(x, y) = (x-2)(y-2);$

$$\left\{\begin{matrix} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}(y-2)^2 \\ 0 \ = (x-2)(y-2) \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}(y-2)^2 \\ x = 2 \ \ \underline{\text{oder}} \ \ y = 2 \end{matrix}\right\}$$

*Fall 1:* $x = 2$ <u>und</u> $1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}(y-2)^2$
$\Leftrightarrow\ x = 2$ <u>und</u> $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(y-2)^2 \ \Leftrightarrow\ x = 2$ <u>und</u> $y - 2 = \pm 1 \ \Leftrightarrow\ x = 2$ <u>und</u> $y = 2 \pm 1$.

*Fall 2:* $y = 2$ <u>und</u> $1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}(y-2)^2 \ \Leftrightarrow\ y = 2$ <u>und</u> $1 - \frac{1}{x} = 0 \ \Leftrightarrow\ y = 2$ <u>und</u> $x = 1$.

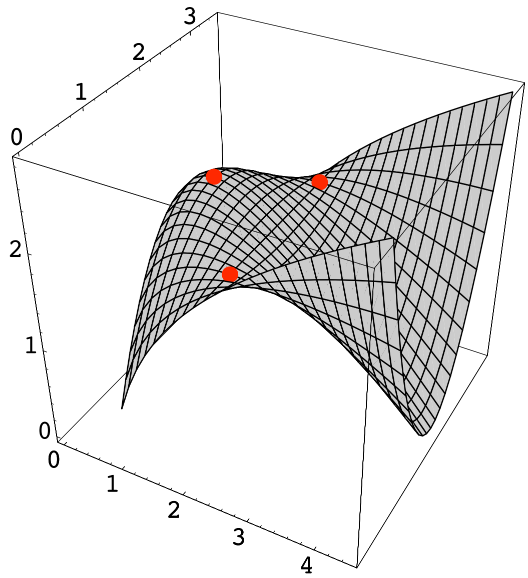
Also sind die stationären Punkte: $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (2, 3)$ und $P_3 = (1, 2)$;

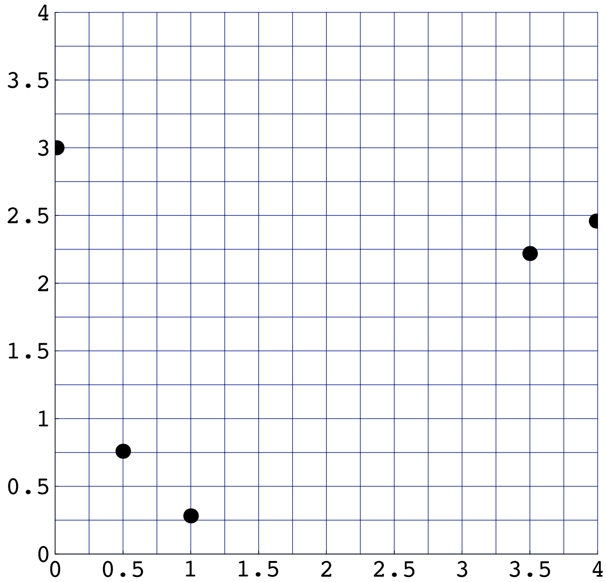
$f''_{xx}(x, y) = -1/x^2, \quad f''_{yy}(x, y) = x - 2, \quad f''_{xy}(x, y) = y - 2 = f''_{yx}(x, y);$
$H_D(x, y) = -\frac{x-2}{x^2} - (y-2)^2;$

$H_D(2, 1) = H_D(2, 3) = -1 < 0;\ \ H_D(1, 2) = 1 > 0,\ f''_{xx}(1, 2) = -1 < 0.$

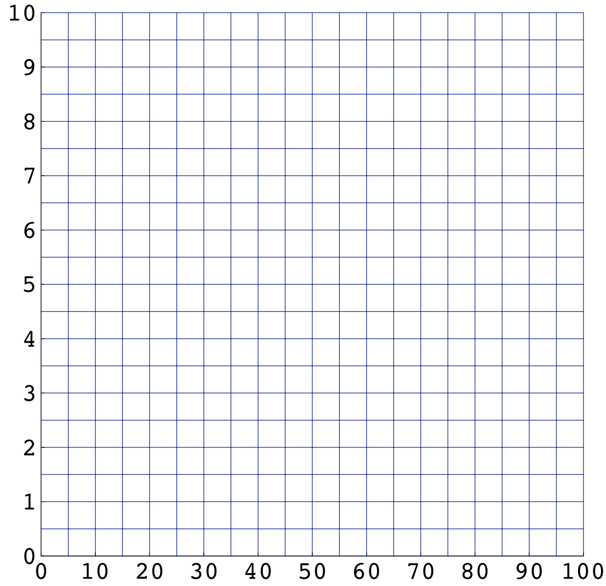
Somit sind $(2, 1)$ und $(2, 3)$ Sattelpunktstellen mit Wert $f(2, 1) = 1 + \ln 2 = f(2, 3)$;
Und $(1, 2)$ ist (lokale) Maximalstelle mit Wert $f(1, 2) = 2$.

*Zum Vergleich:* So sieht die Funktion im Bereich ihrer stationären Punkte aus



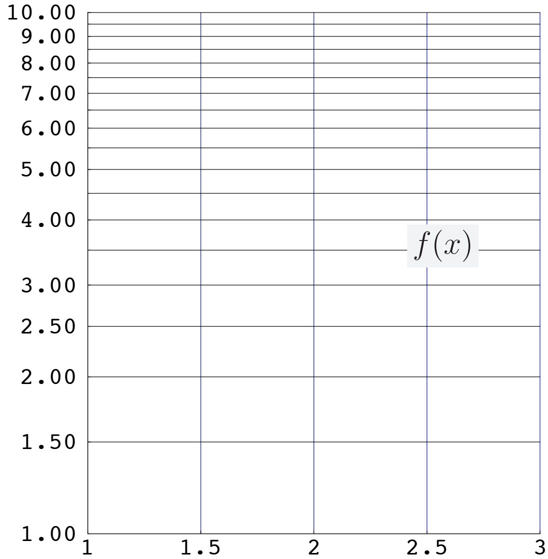



*Ersatzvorlage zu Aufgabe 2(a)*

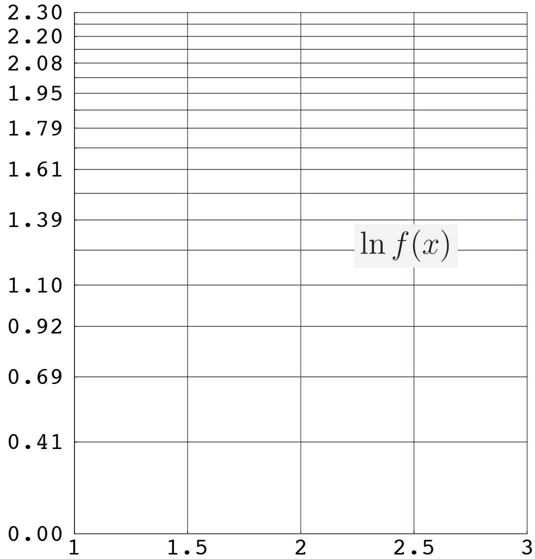



*Ersatzvorlage zu Aufgabe 6(b)*

*Halblogarithmische Darstellung von $f$*
*logarithmisches $y$-Gitter*




*Halblogarithmische Darstellung von $f$*
*normales $y$-Gitter*




*Ersatzvorlagen zu Aufgabe 5(b)*