Mathematik für Ökonomen — SS 2008 — Campus Duisburg
U. Herkenrath/H. Hoch, Fachbereich Mathematik

Klausur Mathematik 1

22. Juli 2008, 11:00–13:00 Uhr (120 Minuten)

- *Erlaubte* ***Hilfsmittel****: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie ***Handy*** *oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muß* ***geheftet*** *bleiben.*
- *Bei* ***Klausurunterbrechung*** *müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher* ***keine vorzeitige Abgabe*** *möglich.*
- *Während der Klausur können* ***keine Fragen*** *zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

Die Klausur besteht aus ***8 Aufgaben*** *mit jeweils 4–6 erreichbaren Punkten*
und aus ***1 Aufgabe*** *(Nr. 1) mit 10 erreichbaren Punkten.*
Insgesamt sind **50** ***Punkte*** *erreichbar.*
Ab erreichten **23** ***Punkten*** *ist die Klausur bestanden,* ***gutes Gelingen!***

Matrikelnummer ______________________

NAME ______________________

Vornamen ______________________

Geburtsdatum ______________________

Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ______________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings teils ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.

Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

Aufgabe 1 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $x + y \geq 6$

(2) $3x + 2y \leq 25$

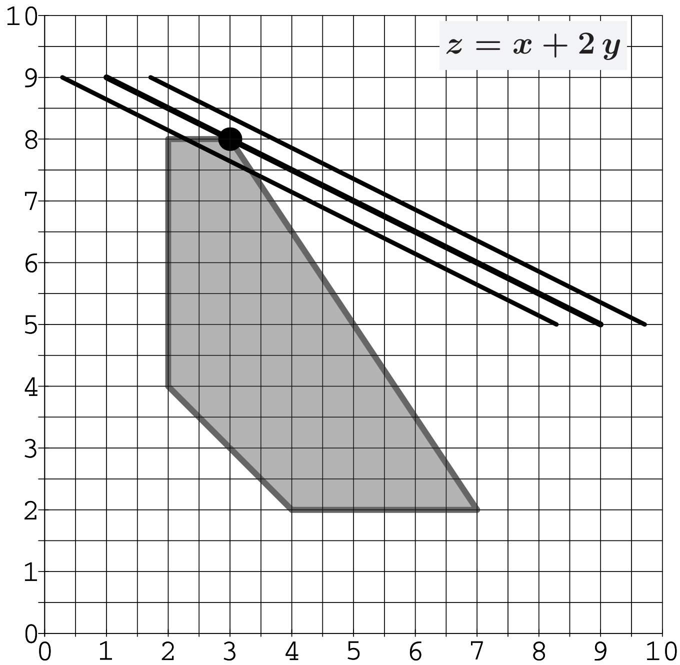
(3) $y \leq 8$

(4) $y \geq 2$

(5) $x \geq 2$

Ergebniskontrolle

$$y \geq 6 - x \quad \text{und} \quad y \leq \frac{25}{2} - \frac{3}{2}x \quad \text{und} \quad y \leq 8 \quad \text{und} \quad y \geq 2 \quad \text{und} \quad x \geq 2$$



[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = x + 2\,y}$ „halbgraphisch“ : *Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) <u>und</u> Maximalwert z_0 <u>rechnerisch</u> bestimmen.*

Ergebniskontrolle

Zielgeradenschar in (x, y)-Koordinaten: $y = \frac{1}{2}\,z - \frac{1}{2}\,x$.
Der Koeffizient von z (bzw. der Koeffizient von y in der Zielfunktion) ist <u>positiv</u>, also bedeutet Maximierung von z eine parallele Verschiebung nach <u>oben</u>.

Rechnerisch: $x_0 = 3, \quad y_0 = 8, \quad z_0 = 19$

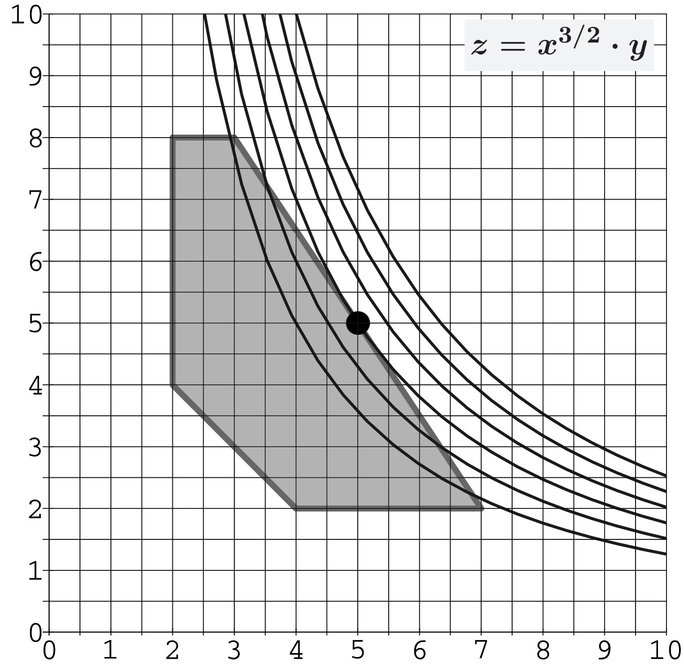
(x_0, y_0) ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Beschränkungslinien

$$(2)\ y = \frac{25}{2} - \frac{3}{2}\,x \quad \text{und} \quad (3)\ y = 8$$

z.B. so: $y = 8 = \frac{25}{2} - \frac{3}{2}\,x$, also $y_0 = 8$ und $x_0 = \frac{2}{3}(\frac{25}{2} - 8) = 3$.
Maximalwert: $z_0 = x_0 + 2\,y_0 = 19$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = x^{3/2} \cdot y}$ „halbgraphisch“ : *Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalen z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren, Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.*

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) *korrekt* in das folgende Diagramm.



Ergebniskontrolle

$x_0 = 5, \quad y_0 = 5, \quad z_0 = 5^{3/2} \cdot 5$ $[= 25 \cdot 5^{1/2}]$
ergibt sich z.B. aus dem Einsetzen der relevanten Beschränkungsgeraden
(2) $y = \frac{25}{2} - \frac{3}{2}x$ in die Zielfunktion:
$z = f(x) = x^{3/2}(\frac{25}{2} - \frac{3}{2}x) = \frac{25}{2}x^{3/2} - \frac{3}{2}x^{5/2}$ mit der Ableitung
$f'(x) = \frac{75}{4}x^{1/2} - \frac{15}{4}x^{3/2} = \frac{15}{4}x^{1/2}(5 - x) \quad (x > 0)$
$f'(x) = 0$ liefert $x = 5$, also die Maximalstelle (x_0, y_0) mit
$x_0 = 5$ und $y_0 = \frac{25}{2} - \frac{3}{2} \cdot 5 = 5$ [offensichtlich: $(5, 5) \in$ Lösungsmenge]

Maximalwert: $z_0 = x_0^{3/2} \cdot y_0 = 5^{3/2} \cdot 5$ $[= 25 \cdot 5^{1/2}]$.

Aufgabe 2 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[1] **(a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 \cdot n^{2/3} - n^{1/3} + 7}{5 \cdot n^{2/3} - 3 \cdot n^{1/3}} = ?$

[3] **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k - \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k = ?$ *Untere Summengrenze beachtet?*

Ergebniskontrolle

(a) $\dfrac{2}{5}$

(b) $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}} - \dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1 \cdot 3^2 \cdot 4}{3 \cdot 4^2 \cdot 1} - \dfrac{9 \cdot 1^2 \cdot 3}{2 \cdot 3^2 \cdot 2} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{4} = 0$

Aufgabe 3 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Eine endliche Folge von jährlichen Zahlungen a_i, $i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Betrag $|d|$ abnehmen, soll sich in n Jahren zu einem Wert von $s_n = 240$ aufsummieren (z.B. bei einer einfachen Form der Abschreibung oder Mittelbewirtschaftung).

(1) Wie errechnet sich s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(2) $a_1 = 33$ und $|d| = 2$ (d.h. $d = -2$) werden festgelegt.
Welchen Wert muss die Anzahl n haben, wenn *keine negativen Zahlungen* a_i zugelassen sind? Und wie hoch ist dann die letzte Zahlung a_n?

Ergebniskontrolle

(1) $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithmetische Summe]

(2) $a_1 = 33,\ d = -2,\ s_n = 240 \ \Rightarrow\ 240 = n \cdot 33 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-2) = 34 \cdot n - n^2$
d.h. $n^2 - 34 \cdot n + 240 \overset{!}{=} 0$, mit den Lösungen $n \in \{17-7; 17+7\} = \{10; 24\}$.
n-te Zahlung: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ Da $a_{24} = 33 + 23 \cdot (-2) = -13 < 0$, entfällt die Lösung $n = 24$ wegen „Entsparen" (= negative Zahlungen).
Insgesamt: $n = 10$ mit letzter Zahlung $a_{10} = 33 + 9 \cdot (-2) = 15$.
[*Zum Vergleich die 24 aufeinanderfolgenden „Kontostände": 33, 64, 93, 120, 145, 168, 189, 208, 225,* **240** *(253, 264, 273, 280, 285, 288, 289, 288, 285, 280, 273, 264, 253, 240)*]

Aufgabe 4 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}_{3\times 1} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{1\times 2}$$

(1) $C \cdot B$ **(2)** $(\mathbf{E}_{3\times 3} - A)^T$ **(3)** $A \cdot B$ und $A \cdot B \cdot C$

Ergebniskontrolle

(1) $C_{1\times 2} \cdot B_{3\times 1}$ nicht definiert **(2)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Bei einem zweistufigen Produktionsprozeß sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen M_{RZ} und M_{ZE} gegeben:

		Zwischenprod. Z_1	Z_2
Rohstoffe	R_1	2	4
	R_2	1	2
	R_3	1	3

		Endprodukte E_1	E_2	E_3
Zwischen-	Z_1	0	2	1
produkte	Z_2	1	2	2

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2, r_3) = (1,\ 3,\ 2)$.

[2] **(a)** Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

[2] **(b)** Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 10 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$,

		Endprodukte E_1	E_2	E_3
Rohstoffe	R_1	4	12	10
	R_2	2	6	5
	R_2	3	8	7

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 55 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = 310$

Aufgabe 6 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) zum Jahresende.

[3] **(a)** Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und zugehörige Zinsstaffel: 21%, 10%, 10%, 0%.
Rendite $\mathfrak{i} = p\% = ?$

[3] **(b)** Gegeben: $\mathfrak{i} = p\% = 8\%$, ein Anfangswert $K_0 > 0$ und ein Zielwert K_x, der den Anfangswert K_0 um 80% erhöhen soll.
Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n <u>erstmals</u> die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[*Hilfswerte:* $\ln 0.08 \approx -2.5$, $\ln 0.8 \approx -0.22$, $\ln 1.08 \approx 0.08$, $\ln 1.8 \approx 0.59$, $\ln 8 \approx 2.1$]

Ergebniskontrolle

(a) $1+\mathfrak{i} = (1.21\cdot 1.1\cdot 1.1\cdot 1.0)^{1/4} = (1.1^4)^{1/4} = 1.1$ [oder: $1+\mathfrak{i} = (1.21\cdot 1.1\cdot 1.1\cdot 1.0)^{1/4} = (1.21\cdot 1.21)^{1/4} = 1.21^{2/4} = 1.1$]. Also $\mathfrak{i} = 0.1 = 10\%$.

(b) $K_x = 1.80 \cdot K_0$;

$$K_x = K_0 \cdot (1+\mathfrak{i})^x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\ln(K_x/K_0)}{\ln(1+\mathfrak{i})} = \frac{\ln 1.80}{\ln 1.08} \approx \frac{0.59}{0.08} = 7 + \frac{3}{8}; \text{ also } n = \lceil x \rceil = 8$$

[4] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge der Ungleichung $e^{x^2-2x-3} \leq 1$.

Ergebniskontrolle

$e^{x^2-2x-3} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; x^2-2x-3 \leq 0$ (weil die Exponentialfunktion strikt monoton wächst).
$x^2-2x-3 \stackrel{!}{=} 0$ hat die Lösungen $x_{1/2} = 1 \pm 2 = \{-1; 3\}$, d.h.
$x^2-2x-3 = (x-(-1))(x-3) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq x \leq 3$; andere Darstellung: $\mathbb{L} = [-1, 3]$

Aufgabe 8 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] Bestimmen Sie die Lösungsmengen der beiden folgenden linearen Gleichungssysteme <u>simultan</u> mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte.)
Geprüft wird, an einem einfachen Beispiel, die Beherrschung der <u>Methode</u> — eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$\begin{array}{ccccccc|c|c} & & & & & & & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ 1\cdot x_1 & + & 1\cdot x_2 & + & 0\cdot x_3 & = & & 2 & 0 \\ 1\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & 1\cdot x_3 & = & & 1 & 1 \\ 0\cdot x_1 & - & 1\cdot x_2 & - & 1\cdot x_3 & = & & 1 & 0 \end{array}$$

Ergebniskontrolle

	x_1	x_2	x_3 =	a	b	*Protokollbsp.*
A	1	1	0	2	0	*I*
	1	2	1	1	1	*II*
	0	−1	−1	1	0	*III*
	1	1	0	2	0	**I**
	0	1	1	−1	1	*II* − 1 · **I**
	0	−1	−1	1	0	*III*
	1	0	−1	3	−1	*I* − 1 · **II**
	0	1	1	−1	1	**II**
	0	0	0	0	1	*III* + 1 · **II**

$A \cdot x = b$ ist nicht lösbar, da $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \neq 1$, d.h. $\mathbb{L}_b = \emptyset$.
Beim LGS $A \cdot x = a$ sind zwei der drei Variablen durch dieses LGS festgelegt, eine Variable ist frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}_a = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{array}{rcl} x_1 & = & 3 + x_3 \\ x_2 & = & -1 - x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R} & \text{frei wählbar} & \end{array} \right\}$$

Aufgabe 9 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] Gegeben ist die folgende Matrixgleichung, wobei X unbekannt ist:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Welche Dimension muss X haben, damit die Gleichung definiert ist?

(2) Lösen Sie die Gleichung nach X auf und rechnen Sie dann X aus.

Ergebniskontrolle

(1) 2×2 **(2)** $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die erste Gleichung setzt voraus, dass die Inverse existiert, was (z.B.) durch deren konkrete Angabe bestätigt wird. Berechnung der Inversen (der GJ-Algorithmus ist hierzu nicht ausdrücklich verlangt):

x_1	x_2 $=$	a	b	*Protokollbsp.*
3	5	1	0	I
1	2	0	1	II
1	5/3	1/3	0	$\mathbf{I}/3$
0	1	-1	3	$3 \cdot II - 1 \cdot \mathbf{I}$
1	0	2	-5	$1 \cdot I - 5/3 \cdot \mathbf{II}$
0	1	-1	3	$\mathbf{II}$