Mathematik für Ökonomen — SS 2008 — Campus Duisburg

U. Herkenrath/H. Hoch, Fachbereich Mathematik

Klausur Mathematik 2

22. Juli 2008, 08:30–10:30 Uhr (120 Minuten)

- *Erlaubte* ***Hilfsmittel****: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie ***Handy*** *oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muss* ***geheftet*** *bleiben.*
- *Bei* ***Klausurunterbrechung*** *müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher* ***keine vorzeitige Abgabe*** *möglich.*
- *Während der Klausur können* ***keine Fragen*** *zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

Die Klausur besteht aus ***9 Aufgaben*** *mit jeweils 4–6 erreichbaren Punkten*
und aus ***1 Aufgabe*** *mit 10 erreichbaren Punkten (Aufgabe 10).*
Insgesamt sind **50** ***Punkte*** *erreichbar.*
Ab erreichten **23** ***Punkten*** *ist die Klausur bestanden,* ***gutes Gelingen!***

Matrikelnummer ______________________________

NAME ______________________________

Vornamen ______________________________

Geburtsdatum ______________________________

Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ______________________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings teilweise sehr ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.

Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

Aufgabe 1 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α und β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 1$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/2} - \alpha \cdot x^{7/4} & \text{für } 0 < x < 1 \\ \beta & \text{für } x = 1 \\ \dfrac{1}{1 + 3 \cdot x^2} & \text{für } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle

LGW in $x_0 = 1$: $1 - \alpha$, Funktionswert in $x_0 = 1$ (FW): β, RGW in $x_0 = 1$: $1/4$.

f stetig in $x_0 = 1 \Leftrightarrow$ LGW=FW=RGW in x_0, d.h. $1 - \alpha = \beta$ und $\beta = 1/4$,

also f stetig in x_0 mit der Festlegung: $\alpha = 3/4$, $\beta = 1/4$.

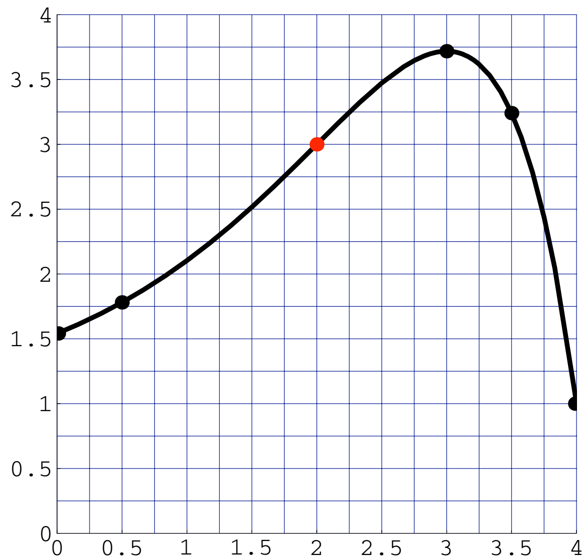
Aufgabe 2 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

Gegeben $f(x) = 1 + (4 - x) \cdot e^{x-2}$ mit $D(f) = [0,\ 4]$. *Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!*

Die Funktion hat die Ableitung $f'(x) = -e^{x-2} + (4 - x) \cdot e^{x-2} = (3 - x) \cdot e^{x-2}$
und die lokale Maximalstelle $x = 3$ mit Wert $f(3) = 1 + e$.

[4] **(a)** Untersuchen Sie auf Basis dieser Informationen das Krümmungsverhalten (Konvexität/Konkavität) von f und skizzieren Sie f.

[Bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen; folgende Hilfswerte sind bereits eingetragen: $f(0) \approx 1.54$, $f(0.5) \approx 1.78$, $f(3) \approx 3.72$, $f(3.5) \approx 3.24$, $f(4) = 1$]



Ergebniskontrolle

$f''(x) = -e^{x-2} + (3 - x) \cdot e^{x-2} = (2 - x) \cdot e^{x-2}$. Da $e^{2-x} > 0$, gilt:
Vorzeichen von $f''(x)$ = Vorzeichen von $(2 - x)$ für alle $x \in D(f) = [0, 4]$;

also $f''(x) \geq 0$ für $x \leq 2$, d.h. f konvex über $[0, 2]$,
und $f''(x) \leq 0$ für $x \geq 2$, d.h. f konkav über $[2, 4]$;
Wendepunkt an der Stelle $x = 2$ mit Wert $f(2) = 1 + 2 \cdot e^0 = 3$.

[2] **(b)** Bestimmen Sie die Elastizitätsfunktion $\mathcal{E}^f(x)$ der obigen Funktion f und damit an der Basisstelle $x_0 = 2$ die (ungefähre) relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ gegenüber $f(2)$ bei einer relativen Erhöhung von $x_0 = 2$ um 3%.

Ergebniskontrolle

$\mathcal{E}^f(x) = x \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \dfrac{(3-x) \cdot e^{x-2}}{1 + (4-x) \cdot e^{x-2}}$; für $x_0 = 2$ ist $\dfrac{df}{f} \approx \mathcal{E}^f(2) \cdot 3\%$, also

$\dfrac{df}{f} \approx 2 \cdot \dfrac{f'(2)}{f(2)} \cdot 3\% = 2 \cdot \dfrac{1}{1+2} \cdot 3\% = 2\%$ [oder dezimal: $\dfrac{df}{f} \approx 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 0.03 = 0.02$]

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{6 - 4 \cdot (2-x)^{1/2} - 2 \cdot x}{1 - x + x \cdot \ln x}$

Ergebniskontrolle

Zweimal LHR $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6 - 4 \cdot (2-x)^{1/2} - 2 \cdot x}{1 - x + x \cdot \ln x}$

$$\overset{\mathrm{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2 \cdot (2-x)^{-1/2} - 2}{\underbrace{-1 + 1 \cdot \ln x + x \cdot x^{-1}}_{= \ln x}} \overset{\mathrm{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(2-x)^{-3/2}}{x^{-1}} = \frac{1}{1} = 1$$

[4] Zur Berechnung von $2^{1/10} \approx 1.07177$ ist die folgende Bestimmungsgleichung für x zu lösen:

$$x^{10} \stackrel{!}{=} 2$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von x mit Hilfe des Newton-Verfahrens, d.h. gefragt sind: *Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert $x_0 = 1$, eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (einsetzen, nicht ausrechnen).*

Ergebniskontrolle

$f(x) = x^{10} - 2 \stackrel{!}{=} 0$, $f'(x) = 10\,x^9$; $x_{n+1} = x_n - (\,f(x_n)/f'(x_n)\,)$; Startwert $x_0 = 1$;

Erste Iteration: $x_1 = 1 - (\,f(1)/f'(1)\,) = 1 - (\,-1/10\,) = \frac{11}{10} = 1.1$;

Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.1 - \dfrac{f(1.1)}{f'(1.1)} = 1.1 - \dfrac{1.1^{10} - 2}{10 \cdot 1.1^9}$ [≈ 1.07482].

[Anwendungsbeispiel mit Bezug zur Zinsrechnung (Mathe 1):
x = Effektiver Zinsfaktor für eine Kapitalverdoppelung nach 10 Jahren, Rendite = $x - 1$]

Aufgabe 5

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_1^5 f(t)\,dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} t^{-1/2} & \text{für } 1 \leq t \leq 4 \\ e^{5-t} & \text{für } 4 < t \leq 5 \end{cases}$

Ergebniskontrolle

$$\begin{aligned} \int_1^5 f(t)\,dt &= \int_1^4 t^{-1/2}\,dt + \int_4^5 e^{5-t}\,dt &&= [2\cdot t^{1/2}]_1^4 + [(-1)\cdot e^{5-t}]_4^5 \\ &= 2(4^{1/2} - 1^{1/2}) + (-1)(e^0 - e^1) &&= 2 - (1-e) = 1 + e \quad [\approx 3.7182] \end{aligned}$$

[5] Für $25 \leq x \leq 100$ sei $F(x) := F(25) + \int_{25}^{x} (10 - t^{1/2})\, dt$, wobei $F(25)$ fix vorgegeben.

(a) Berechnen Sie den Wert $F(64)$. *[Hinweis: $z^{3/2} = (z^{1/2})^3$]*

(b) Skizzieren Sie *grob* das durch das Integral $\int_{25}^{64} (10-t^{1/2})\, dt$ berechnete Flächenstück (z.B. anhand der „Hilfspunkte" $t = 16$, $t = 25$, $t = 64$, $t = 81$)

Ergebniskontrolle

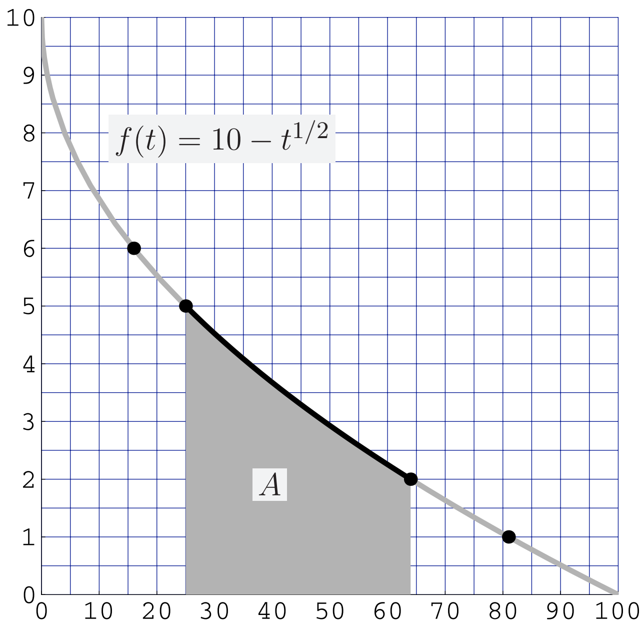
(a) $F(64) = F(25) + \int_{25}^{64} (10 - t^{1/2})\, dt$, wobei

$$A = \int_{25}^{64} (10 - t^{1/2})\, dt = [10 \cdot t - \tfrac{2}{3} \cdot t^{3/2}]_{25}^{64}$$

$$= (640 - \tfrac{2}{3} \cdot 64^{3/2}) - (250 - \tfrac{2}{3} \cdot 25^{3/2}) = 640 - \tfrac{1024}{3} - 250 + \tfrac{250}{3}\ [= 390 - \tfrac{774}{3}] = 132$$

$$[64^{3/2} = (64^{1/2})^3 = 8^3 = 512; \quad 25^{3/2} = 5^3 = 125]$$

(b) Skizze Typ „$-\sqrt{x}$". z.B. mit der „Wertetabelle" $f(16) = 6$, $f(25) = 5$, $f(64) = 2$, $f(81) = 1$ für den Integranden $f(t) := 10 - t^{1/2}$.



Aufgabe 7 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad $n = 2$) der Funktion $f(x) = 2 \cdot x^{-1/2}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ und damit eine Näherung für den Wert $f(\frac{4}{3})$. [*zum Vergleich der Größenordnung:* $f(\frac{4}{3}) = \sqrt{3}$].

Ergebniskontrolle [*zum Vergleich:* $f(4/3) = 2 \cdot (4/3)^{-1/2} = 3^{1/2} \approx 1.732051$]

$f(1) = 2, \quad f'(x) = -1 \cdot x^{-3/2}, \quad f'(1) = -1, \quad f''(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{-5/2}, \quad f''(1) = \frac{3}{2}$

$T_2^f(x; 1) := f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot (x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 = 2 - (x-1) + \frac{3}{4}(x-1)^2$

$f(\frac{4}{3}) \approx T_2^f(\frac{4}{3}; 1) = 2 - (\frac{1}{3})^1 + \frac{3}{4}(\frac{1}{3})^2 = \frac{5}{3} + \frac{1}{12} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$ [$= 1.75$]

[5] Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = x^3 \cdot (1-y) + \ln(x^4 \cdot y^{-2})$ $(x, y > 0)$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

[Hinweis: Natürlich darf (aber muss nicht) vor dem Ableiten umgeformt werden.]

Ergebniskontrolle

Einfachst nach der Umformung: $f(x,y) = x^3 \cdot (1-y) + 4 \cdot \ln(x) - 2 \cdot \ln(y)$

$f'_x(x,y) = 3\,x^2 \cdot (1-y) + 4\,x^{-1}$; $f'_y(x,y) = -x^3 - 2\,y^{-1}$;

$f''_{xx}(x,y) = 6\,x \cdot (1-y) - 4\,x^{-2}$; $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -3\,x^2$; $f''_{yy}(x,y) = 2\,y^{-2}$.

Ohne Umformung des $\ln(\cdot)$-Ausdrucks ergeben sich nur die beiden ersten partiellen Ableitungen etwas umständlicher mit der Kettenregel, der Rest bleibt gleich:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 3\,x^2\,(1-y) + \tfrac{4 \cdot x^3 \cdot y^{-2}}{x^4 \cdot y^{-2}} = 3\,x^2\,(1-y) + 4\,x^{-1} \\ f'_y(x,y) &= -\,x^3 + \tfrac{x^4 \cdot (-2) \cdot y^{-3}}{x^4 \cdot y^{-2}} = -\,x^3 - 2\,y^{-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 9 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Gegeben sind die Funktion $f(x,y) = x^2 \cdot y + 2 \cdot \ln x + e^{y-x} \quad (x > 0,\ y > 0)$ und ihre partiellen Ableitungen $f'_x(x,y) = 2xy + \frac{2}{x} - e^{y-x}$ und $f'_y(x,y) = x^2 + e^{y-x}$.

Beachte: Die ersten partiellen Ableitungen sind gegeben!

(a) Geben Sie mit Hilfe des totalen Differentials eine Näherung für die Änderung der Funktion f an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (1,1)$, wenn sich dort die x-Variable zu 0.8 und die y-Variable zu 1.1 verändert: $f(0.8, 1.1) - f(1,1) \approx ?$

(b) Die Abhängigkeit zwischen x und y sei auf dem konstanten Niveau $z > 0$ gegeben durch eine implizite Darstellung mittels der obigen Funktion, d.h.

$$z = x^2 \cdot y + 2 \cdot \ln x + e^{y-x}.$$

Für die Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$ ist die Niveaubedingung $z = 2$ erfüllt. Berechnen Sie an dieser Stelle die Grenzrate der Substitution von y durch x: $\frac{dx}{dy}(1,1) = ?$

Ergebniskontrolle

(a) $f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx df = f'_x(x_0,y_0) \cdot dx + f'_y(x_0,y_0) \cdot dy$ (totales Differential) mit $dx = x - x_0$ und $dy = y - y_0$.
Hier ist $f'_x(1,1) = 2 + 2 - 1 = 3$, $f'_y(1,1) = 1 + 1 = 2$, $dx = -0.2$, $dy = +0.1$
Also $df = 3 \cdot (-0.2) + 2 \cdot 0.1 = -0.4$, d.h. $f(0.8, 1.1) - f(1,1) \approx -0.4$
[Zum Vergleich: Genauer ist $f(0.8, 1.1) - f(1,1) = 1.60757 - 2 = -0.392428$]

(b) $\frac{dx}{dy}(x,y) = -\frac{f'_y(x,y)}{f'_x(x,y)} = -\frac{x^2 + e^{y-x}}{2xy + \frac{2}{x} - e^{y-x}}$; $\frac{dx}{dy}(1,1) = -\frac{2}{3}$ auf dem Niveau $z = 2$.

Aufgabe 10 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[10] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 4 + 10 \cdot (x-1) \cdot (y-2) \cdot e^{y-x-1} \qquad (x > 0\,,\ y > 0)$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelpunktstellen *und* die zugehörigen Funktionswerte)

[*Hinweis: Dies ist die angekündigte Aufgabe mit einem etwas schwierigeren Aufgabenteil*]

Ergebniskontrolle

$f'_x(x,y) = 10 \cdot e^{y-x-1}(2-x)(y-2), \quad f'_y(x,y) = 10 \cdot e^{y-x-1}(x-1)(y-1);$

Da $e^z > 0$ für jeden Ausdruck z, reduziert sich die Nullstellenbestimmung auf:

$$\left\{\begin{matrix} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} (2-x)(y-2) = 0 \\ (x-1)(y-1) = 0 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} x = 2 \ \ \underline{\text{oder}} \ \ y = 2 \\ x = 1 \ \ \underline{\text{oder}} \ \ y = 1 \end{matrix}\right\}$$

Fallunterscheidung z.B. nach der ersten Gleichung:

Fall 1: $x = 2$ und $(x = 1$ oder $y = 1) \ \Leftrightarrow\ x = 2$ und $y = 1$
(denn wegen $x = 2$ scheidet $x = 1$ als Möglichkeit des „oder" aus).

Fall 2: $y = 2$ und $(x = 1$ oder $y = 1) \ \Leftrightarrow\ y = 2$ und $x = 1$
(denn wegen $y = 2$ scheidet $y = 1$ als Möglichkeit des „oder" aus).

Also sind die stationären Punkte: $P_1 = (2,1)$ und $P_2 = (1,2)$.

$f''_{xx}(x,y) = 10 \cdot e^{y-x-1}(x-3)(y-2), \qquad f''_{yy}(x,y) = 10 \cdot e^{y-x-1}(x-1) \cdot y,$
$f''_{xy}(x,y) = 10 \cdot e^{y-x-1}(2-x)(y-1) = f''_{yx}(x,y).$

[Hier die Variante, für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) einzeln die Werte der zweiten Ableitungen und dann erst $H_D = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ an der Stelle (x_0, y_0) auszurechnen:]

$f''_{xx}(2,1) = 10 \cdot e^{1-2-1}(2-3)(1-2) = 10 \cdot e^{-2}, \qquad f''_{yy}(2,1) = 10 \cdot e^{1-2-1}(2-1) \cdot 1 = 10 \cdot e^{-2},$
$f''_{xy}(2,1) = 10 \cdot e^{1-2-1}(2-2)(1-1) = 0; \qquad H_D(2,1) = 100 \cdot e^{-4} > 0.$

$f''_{xx}(1,2) = 10 \cdot e^{2-1-1}(1-3)(2-2) = 0, \qquad f''_{yy}(1,2) = 10 \cdot e^{2-1-1}(1-1) \cdot 2 = 0,$
$f''_{xy}(1,2) = 10 \cdot e^{2-1-1}(1-2)(2-1) = -10; \qquad H_D(1,2) = -(-10)^2 = -100 < 0.$

Insgesamt ist:

- $H_D(2,1) > 0$ und $f''_{xx}(2,1) > 0$, also $(2,1)$ eine lokale Minimalstelle;
  zugehöriger Funktionswert $f(2,1) = 4 + 10 \cdot (2-1) \cdot (1-2) \cdot e^{1-2-1} = 4 - 10 \cdot e^{-2}$.
- $H_D(1,2) < 0$, also $(1,2)$ Sattelpunktstelle;
  zugehöriger Funktionswert $f(1,2) = 4 + 10 \cdot (1-1) \cdot (2-2) \cdot e^{2-1-1} = 4$.

Zum Vergleich: So sieht die Funktion im Bereich ihrer stationären Punkte aus