Mathematik für Ökonomen — SS 2009 — Campus Duisburg

U. Herkenrath/H. Hoch, Fachbereich Mathematik

Klausur Mathematik 1

28. Juli 2009, 08:30–10:30 Uhr (120 Minuten)

- *Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  *Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muß **geheftet** bleiben.*
- *Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.*
- *Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

*Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,*
davon 8 Aufgaben mit jeweils 4–6 erreichbaren Punkten
und 1 Aufgabe (Nr. 1) mit 10 erreichbaren Punkten.
*Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.*
*Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!***

Matrikelnummer ______________________

NAME ______________________

Vornamen ______________________

Geburtsdatum ______________________

Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ______________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings schon sehr ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.

Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

Aufgabe 1 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $y + 7x \geq 22$

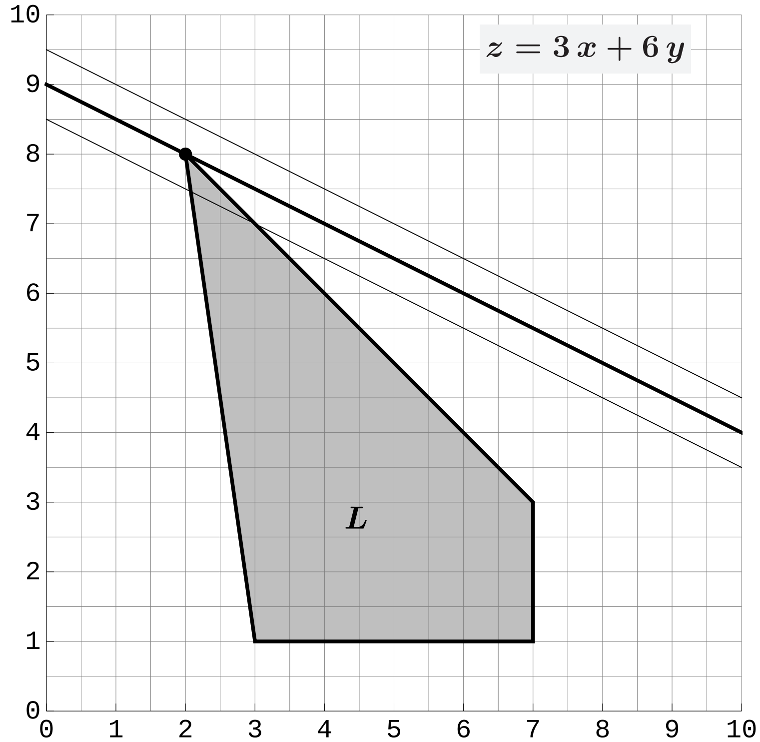
(2) $y + x \leq 10$

(3) $y \geq 1$

(4) $x \leq 7$

Ergebniskontrolle

$$L = \{(x, y): \quad y \geq 22 - 7x \quad \text{und} \quad y \leq 10 - x \quad \text{und} \quad y \geq 1 \quad \text{und} \quad x \leq 7\}$$



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = 3x + 6y}$ „halbgraphisch“ : *Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren, Maximalstelle (x_0, y_0) <u>und</u> Maximalwert z_0 <u>rechnerisch</u> bestimmen.*

Ergebniskontrolle

Zielgeradenschar in (x, y)-Koordinaten: $y = \frac{1}{6}\,z - \frac{1}{2}\,x$.
Der Koeffizient von z (bzw. der Koeffizient von y in der Zielfunktion) ist <u>positiv</u>, also bedeutet Maximierung von z eine parallele Verschiebung nach <u>oben</u>:

Maximalstelle: $x_0 = 2, \quad y_0 = 8$ und Maximalwert: $z_0 = 54$.

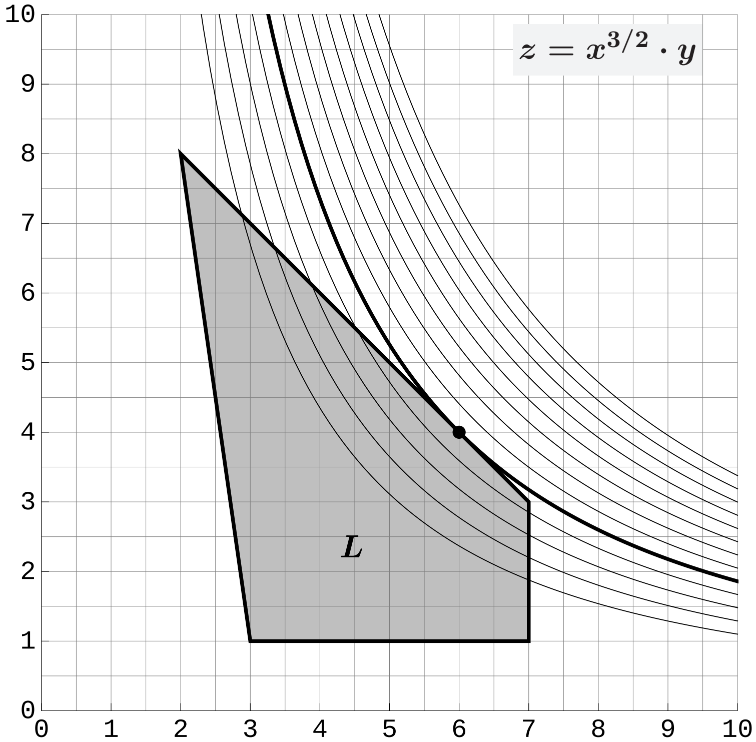
(x_0, y_0) ergibt sich aus dem Schnittpunkt der (nach y aufgelösten) Beschränkungslinien

$$(1)\ y = 22 - 7x \quad \text{und} \quad (2)\ y = 10 - x$$

z.B. so: $22 - 7x = y = 10 - x$, also $22 - 10 = 7x - x$, d.h. $x_0 = 2$ und $y_0 \overset{(2)}{=} 10 - x_0 = 8$, und damit $z_0 = 3\,x_0 + 6\,y_0 = 54$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = x^{3/2} \cdot y}$ „halbgraphisch" : *Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalen z-Wert hervorheben, Maximalstelle* (x_0, y_0) *markieren, Maximalstelle* (x_0, y_0) *und Maximalwert* z_0 *rechnerisch bestimmen.*

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) *korrekt* in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

Ergebniskontrolle

Maximalstelle: $x_0 = 6$, $y_0 = 4$ und Maximalwert: $z_0 = 6^{3/2} \cdot 4$ $[= 24 \cdot \sqrt{6}]$.

(x_0, y_0) ergibt sich z.B. aus dem Einsetzen der (optisch erkannten) relevanten Beschränkungsgerade (2) $y = 10 - x$ in die Zielfunktion:

$z = f(x) = x^{3/2}(10 - x) = 10 \cdot x^{3/2} - x^{5/2}$ mit der Ableitung

$$f'(x) = \frac{30}{2}\, x^{1/2} - \frac{5}{2}\, x^{3/2} \qquad (x > 0)$$

$f'(x) = 0$ liefert $\frac{30}{2} \cdot \frac{2}{5} = x$, also $x = 6$, also die Maximalstelle (x_0, y_0)

mit $x_0 = 6$ und $y_0 \overset{(2)}{=} 10 - x_0 = 4$ [offensichtlich $(6, 4) \in$ Lösungsmenge des LUGS]

und damit $z_0 = x_0^{3/2} \cdot y_0 = 6^{3/2} \cdot 4$ $[= 24 \cdot \sqrt{6} \approx 58.79]$.

[*Hinweis im Hinblick auf Mathe 2:* Hier wird das allgemeine Ergebnis verwendet, dass bei diesem Typ Zielfunktion Nullsetzen der ersten Ableitung nur Kandidaten für Maxima liefern kann (niemals Minima).]

Aufgabe 2

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen

[6] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{6 \cdot n^2 - n^3}{5 \cdot n^2 - 9 \cdot n^3 + 7} = ?$ **(b)** $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k = ?$

(c) $\sum_{i=0}^{\infty} (x-2) \cdot (x-1)^i = ?$ (wobei $0 < x < 2$ fix). *Untere Summengrenzen beachtet?*

Ergebniskontrolle

(a) $\frac{1}{9}$ **(b)** $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

(c) Da $0 < x < 2$, ist $-1 < x - 1 < 1$. D.h. $q := x - 1$ erfüllt die Konvergenzbedingung $|q| < 1$, also $\sum_{i=0}^{\infty} (x-2) \cdot (x-1)^i = (x-2)\dfrac{1}{1-(x-1)} = \dfrac{x-2}{2-x} = -1.$

Aufgabe 3 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Eine endliche Folge von zeitlich regelmäßigen Zahlungen a_i, $i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag d zunehmen, soll sich in n Zahlungsperioden zu einem Wert von $s_n = 5400$ aufsummieren. Hierbei sind auch negative Zahlungen zugelassen.

(1) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(2) $a_1 = -100$ und $d = 100$ werden festgelegt.
Welchen Wert muss n haben, damit das obige Summenziel $s_n = 5400$ mit der letzten Zahlung genau erreicht wird? Und wie hoch ist dann die letzte Zahlung a_n?

Ergebniskontrolle

(1) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe]

(2) $a_1 = -100$, $d = 100$, $s_n = 5400 \Rightarrow 5400 = n \cdot (-100) + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot 100$, d.h.
$50n^2 - 150n - 5400 = 0 \Rightarrow n^2 - 3n - 108 = 0$.
Also $n \in \{\frac{3}{2} - \frac{21}{2}, \frac{3}{2} + \frac{21}{2}\} = \{-9, 12\} \Rightarrow n = 12$ (der negative Wert entfällt).
Letzte Zahlung: $a_{12} = a_1 + (12-1) \cdot d = -100 + 11 \cdot 100 = 1000$.

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus. Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} \quad ; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{1\times 3} \quad ; \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(a) $B \cdot A$

(b) $C - (A \cdot B)^T$

Ergebniskontrolle

(a) $B_{1\times 3} \cdot A_{3\times 1} = 1$

(b) $A_{3\times 1} \cdot B_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ und somit $C - (A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$.

Aufgabe 5 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen M_{RZ} und M_{ZE} gegeben:

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	3	3	4
	R_2	1	2	2

		Endprodukte	
		E_1	E_2
Zwischen-	Z_1	-1	2
produkte	Z_2	3	1
	Z_3	4	1

Rohstoffpreise $r = (\, r_1 \quad r_2 \,) = (\, 3 \quad 2 \,)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 22 & 13 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$ bzw.

		Endprodukte	
		E_1	E_2
Rohstoffe	R_1	22	13
	R_2	13	6

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 118 \\ 63 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (\, 3 \quad 2 \,) \cdot \begin{pmatrix} 118 \\ 63 \end{pmatrix} = 480.$

Aufgabe 6 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins), ein Anfangswert $K_0 > 0$ und ein Zielwert K_x, der um 65% über dem Anfangswert liegen soll.

(a) Gegeben: Laufzeit $n = 6$ (d.h. $K_x = K_6$). Erforderliche Rendite $\mathtt{i} = p\% =?$

(b) Gegeben: $\mathtt{i} = 6.5\%$. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

Hilfswerte: $1.065^{1/6} \approx 1.011,\ 1.65^{1/6} \approx 1.087,\ 0.65^{1/6} \approx 0.931,$
$\ln 6.5 \approx 1.872,\quad \ln 1.65 \approx 0.501,\quad \ln 1.065 \approx 0.063$

Ergebniskontrolle $K_x = 1.65 \cdot K_0$

(a) $1.65 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + \mathtt{i})^6 \;\Leftrightarrow\; 1 + \mathtt{i} = 1.65^{1/6} \approx 1.087 \;\Leftrightarrow\; \mathtt{i} \approx 0.087 = 8.7\%$

(b) $K_x = K_0 \cdot (1.065)^x \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{\ln(K_x/K_0)}{\ln(1.065)} = \dfrac{\ln(1.65)}{\ln(1.065)} \approx \dfrac{0.501}{0.063} = 7 + \dfrac{60}{63};\ n = \lceil x \rceil = 8.$

Aufgabe 7

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen

[6] Die Ungleichung $|x| \leq \ln 2$ läßt sich äquivalent zu einer Ungleichung der Form

$$a \leq \frac{1}{1+e^{-x}} \leq b$$

umformen. Führen Sie dies aus. Welche Zahlenwerte ergeben sich für a und b?

Hinweis: Dies ist die angekündigte Aufgabe mit einem weniger eingeübten Aufgabenteil!

Ergebniskontrolle $a = 1/3$ und $b = 2/3$, denn

$$\begin{aligned}
|x| \leq \ln 2 &\Leftrightarrow -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\
&\Leftrightarrow \ln 2 \geq -x \geq \ln\tfrac{1}{2} \quad [\text{weil } -\ln 2 = \ln\tfrac{1}{2}] \\
&\Leftrightarrow 2 \geq e^{-x} \geq \tfrac{1}{2} \quad [\text{weil } e^z \text{ und } \ln z \text{ strikt mon. wachsen}] \\
&\Leftrightarrow 3 \geq 1+e^{-x} \geq \tfrac{3}{2} \\
&\Leftrightarrow \tfrac{1}{3} \leq \tfrac{1}{1+e^{-x}} \leq \tfrac{2}{3} \quad [\text{Kehrwertbildung positiver Zahlen}]
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Bestimmen Sie die Lösungsmengen der beiden folgenden linearen Gleichungssysteme simultan mit Hilfe des Gauß-(Jordan-)Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).

Geprüft wird, an einem einfachen Beispiel, die Beherrschung der Methode — eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$\begin{array}{rcrcrcl|c|c|} & & & & & & & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ 1\cdot x_1 & - & 1\cdot x_2 & + & 0\cdot x_3 & = & & 2 & -1 \\ 2\cdot x_1 & - & 1\cdot x_2 & - & 1\cdot x_3 & = & & 1 & 1 \end{array}$$

Ergebniskontrolle

x_1	x_2	x_3 =	a	b	*Protokollbsp.*
1	−1	0	2	−1	I
2	−1	−1	1	1	II
1	−1	0	2	−1	$\mathbf{I}$
0	1	−1	−3	3	$II - 2\cdot\mathbf{I}$
1	0	−1	−1	2	$I + 1\cdot\mathbf{II}$
0	1	−1	−3	3	$\mathbf{II}$

$$\mathbb{L}_a = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{array}{rcl} x_1 & = & -1 + x_3 \\ x_2 & = & -3 + x_3 \\ \multicolumn{3}{l}{x_3 \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar}} \end{array} \right\}, \quad \mathbb{L}_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 + x_3 \\ x_2 & = & 3 + x_3 \\ \multicolumn{3}{l}{x_3 \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar}} \end{array} \right\}$$

Aufgabe 9

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen

[6] Gegeben ist die folgende Matrixgleichung, wobei X unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-(Jordan-)Algorithmus die Inverse von A und dann die Lösung für X.

Ergebniskontrolle

	x_1	x_2	x_3	$= a$	b	c	*Protokollbsp.*
A	1	3	1	1	0	0	I
A	0	1	1	0	1	0	II
A	−1	−5	−2	0	0	1	III
	1	3	1	1	0	0	$\mathbf{I}$
	0	1	1	0	1	0	II
	0	−2	−1	1	0	1	$III + 1 \cdot \mathbf{I}$
	1	0	−2	1	−3	0	$I - 3 \cdot \mathbf{II}$
	0	1	1	0	1	0	$\mathbf{II}$
	0	0	1	1	2	1	$III + 2 \cdot \mathbf{II}$
	1	0	0	3	1	2	$I + 2 \cdot \mathbf{III}$
	0	1	0	−1	−1	−1	$II - 1 \cdot \mathbf{III}$
	0	0	1	1	2	1	$\mathbf{III}$

Also ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und damit $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.