# Mathematik für Ökonomen — SS 2009 — Campus Duisburg

U. Herkenrath/H. Hoch, Fachbereich Mathematik

## Klausur Mathematik 2

**28. Juli 2009, 11:00–13:00 Uhr (120 Minuten)**

- *Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  *Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muss **geheftet** bleiben.*
- *Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.*
- *Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

*Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben** mit jeweils 4–8 erreichbaren Punkten.*
*Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.*
*Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!***

**Matrikelnummer** ______________________

**NAME** ______________________

**Vornamen** ______________________

**Geburtsdatum** ______________________

*Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:*

**Unterschrift** ______________________

### BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings schon sehr ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.

Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

## Aufgabe 1

*Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Die folgende Funktion $f$ ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen $\alpha$ und $\beta$ rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 1$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \alpha \cdot x - 2 \cdot \ln x & \text{für } 0 < x < 1 \\ 3/2 & \text{für } x = 1 \\ \beta \cdot (1 + e^{1-x}) & \text{für } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

*Ergebniskontrolle*

LGW in $x_0 = 1$: $1 + \alpha$, Funktionswert in $x_0 = 1$ (FW): $3/2$, RGW in $x_0 = 1$: $2 \cdot \beta$.

$f$ stetig in $x_0 = 1 \Leftrightarrow$ LGW=FW=RGW in $x_0$, d.h. $1 + \alpha = \frac{3}{2}$ und $\frac{3}{2} = 2 \cdot \beta$,

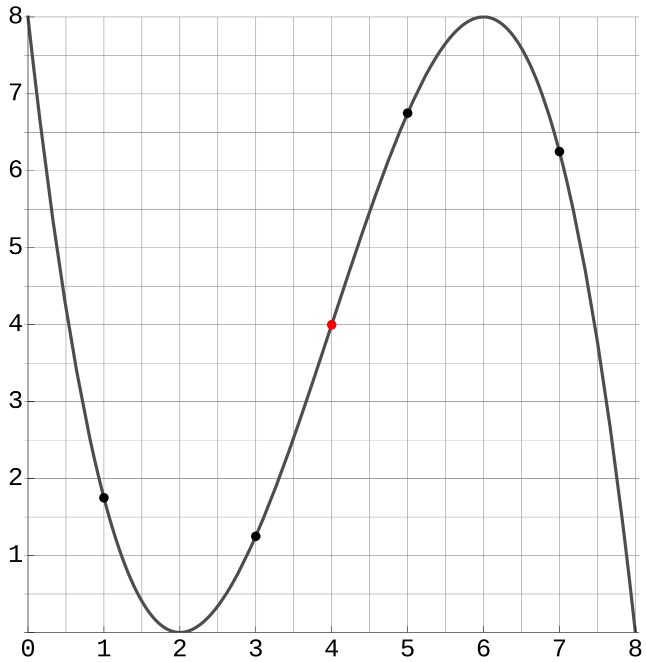
also $f$ stetig in $x_0$ mit der Festlegung: $\alpha = 1/2$, $\beta = 3/4$.

[6] Gegeben $f(x) = (8-x)(x-2)^2/4$ mit $D(f) = [0,\ 8]$. *Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!*

$f$ hat die Ableitung $f'(x) = \frac{3}{4} \cdot (6-x)(x-2)$, die lokale Minimalstelle $x = 2$ mit Wert $f(2) = 0$ und die lokale Maximalstelle $x = 6$ mit Wert $f(6) = 8$.

(a) Untersuchen Sie auf Basis dieser Informationen das Krümmungsverhalten von $f$ (konvex/konkav mit Wendepunkt) und skizzieren Sie $f$.

*[Bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen; als weitere Hilfswerte sind bereits eingetragen:* $f(0) = 8$, $f(1) = 7/4$, $f(3) = 5/4$, $f(5) = 27/4$,$f(7) = 25/4$, $f(8) = 0$*]*




*Ergebniskontrolle*

$f''(x) = \frac{3}{4}(-(x-2) + 6 - x) = \frac{3}{2}(4-x)$.
Vorzeichen von $f''(x) =$ Vorzeichen von $(4-x)$ für alle $x \in D(f) = [0,8]$:

Also $f''(x) \geq 0$ für alle $x \leq 4$, d.h. $f$ konvex über $[0,4]$,
und $f''(x) \leq 0$ für alle $x \geq 4$, d.h. $f$ konkav über $[4,8]$.
Wendepunkt an der Stelle $x = 4$ mit Wert $f(4) = 4 \cdot 2^2/4 = 4$.

(b) Bestimmen Sie die Elastizitätsfunktion $\mathcal{E}^f(x)$ der obigen Funktion $f$ (für Basisstellen $x_0$ mit $2 < x_0 < 8$) und damit an der Basisstelle $x_0 = 5$ die (ungefähre) relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ gegenüber $f(5)$ bei einer relativen Erhöhung von $x_0 = 5$ um 3%.

*Ergebniskontrolle*

$$\mathcal{E}^f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{\frac{3}{4} \cdot (6-x)(x-2)}{\frac{1}{4} \cdot (8-x)(x-2)^2} = x \cdot \frac{3 \cdot (6-x)}{(8-x)(x-2)}.$$

Für $x_0 = 5$ ist damit $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}^f(5) \cdot 3\% = 5 \cdot \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 3} \cdot 3\% = 5\%$.

[*Zum Vergleich:* Unsere Näherung: $f(5) \cdot 1.05 = 7.088$ und „exakt“: $f(5.15) = 7.070$]

## Aufgabe 3 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1}{4 \cdot x^3}$

*Ergebniskontrolle*

Dreimal LHR $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1}{4 \cdot x^3}$

$$\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot e^{2x} - 4 \cdot x - 2}{12 \cdot x^2} \overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4 \cdot e^{2x} - 4}{24 \cdot x} \overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{8 \cdot e^{2x}}{24} = \frac{1}{3}$$

[4] Zu lösen ist (z.B. zur Berechnung eines effektiven Zinsfaktors $x$) die folgende Bestimmungsgleichung für $x$: $x^9 + x \overset{!}{=} 2.2$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von $x$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens, d.h. gefragt sind: *Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert* $x_0 = 1$, *eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (einsetzen, nicht ausrechnen).*

*Ergebniskontrolle*

$f(x) = x^9 + x - 2.2 \overset{!}{=} 0, \;\; f'(x) = 9\,x^8 + 1;$ $x_{n+1} = x_n - (\, f(x_n)/f'(x_n)\,);$
Startwert $x_0 = 1$;

- Erste Iteration: $x_1 = x_0 - (\, f(x_0)/f'(x_0) = 1 - (\, f(1)/f'(1)\,) = 1 - (\,-0.2/10\,) = 1.02;$
- Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.02 - \dfrac{f(1.02)}{f'(1.02)} = 1.02 - \dfrac{1.02^9 + 1.02 - 2.2}{9 \cdot 1.02^8 + 1}$

*[Zum Vergleich genauer:* $x_2 \approx 1.01869$ *(dies ist schon der auf 5 Stellen genaue* $x$*-Wert)].*

## Aufgabe 5 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^e f(t)\,dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 7 - e^{t/2} & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ t^{-1/2} & \text{für } 1 < t \leq e \end{cases}$

*Ergebniskontrolle*

$$\begin{aligned} \int_0^e f(t)\,dt &= \int_0^1 (7 - e^{t/2})\,dt + \int_1^e t^{-1/2}\,dt &&= [\,7 \cdot t - 2 \cdot e^{t/2}\,]_0^1 + [2 \cdot t^{1/2}]_1^e \\ &= 7 - 2 \cdot e^{1/2} - (-2) + (2 \cdot e^{1/2} - 2) &&= 7. \end{aligned}$$

## Aufgabe 6



[5] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x \ln t \; dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = 0$.

Berechnen Sie $F(x)$ mittels partieller Integration.

[*Hinweis: Dies ist die angekündigte Aufgabe mit einem weniger geübten Aufgabenteil*]

*Ergebniskontrolle* *[Vgl. Regel Nr. 86, Thema 8]*

Mit $f(t) = t$ und $g(t) = \ln t$ ist $f'(t) = 1$ und $g'(t) = 1/t$ und somit

$$F(x) = \int_1^x 1 \cdot \ln t \; dt = [t \cdot \ln t]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} \; dt = [t \cdot \ln t]_1^x - [t]_1^x = x \cdot \ln x - x + 1.$$

## Aufgabe 7 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad $n = 2$) der Funktion $f(x) = (1 + e^x)^{-1}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und damit eine Näherung für den Wert $f(-0.05) = (1 + e^{-0.05})^{-1}$.

*Ergebniskontrolle* $f(0) = \frac{1}{2}$; $f'(x) = -e^x \cdot (1 + e^x)^{-2} = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$, $f'(0) = -\frac{1}{4}$;

$f''(x) = -\frac{e^x \cdot (1 + e^x)^2 - e^x \cdot 2 \cdot (1 + e^x) \cdot e^x}{(1 + e^x)^4}$ $\left[= -\frac{e^x \cdot (1 + e^x) \cdot (1 - e^x)}{(1 + e^x)^4}\right]$, $f''(0) = 0$;

$T_2^f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$ [mit $x_0 = 0$].

$f(-0.05) \approx T_2^f(0.05; 0) = \frac{1}{2} - \frac{-0.05}{4} = 0.5125$ [*zum Vergleich genauer:* 0.512497].

## Aufgabe 8 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = (1-y) \cdot \ln x - x \cdot e^{1-y} \quad (x > 0)$
die partiellen Ableitungen $f'_x$, $f'_y$, sowie $f''_{xx}$, $f''_{yy}$ und $f''_{xy}$ (oder $f''_{yx}$).

*Ergebniskontrolle*

$$f'_x(x,y) = (1-y) \cdot x^{-1} - e^{1-y};$$
$$f'_y(x,y) = -\ln x + x \cdot e^{1-y};$$
$$f''_{xx}(x,y) = -(1-y) \cdot x^{-2} \;\; [= (y-1) \cdot x^{-2}];$$
$$f''_{yy}(x,y) = -x \cdot e^{1-y};$$
$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -x^{-1} + e^{1-y}.$$

## Aufgabe 9 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = 14 - 3 \cdot x - 2 \cdot y + x^2 \cdot y^2$ und die Basisstelle $(x_0, y_0)$ mit $x_0 = 2$ und $y_0 = 1$.

**(a)** Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

**(b)** Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion $f$ an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die $x$-Variable um $+10\%$ und die $y$-Variable um $-5\%$ verändert.

*Ergebniskontrolle*

**(a)** $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$
mit $f'_x(x, y) = -3 + 2 \cdot x \cdot y^2$ und $f'_y(x, y) = -2 + 2 \cdot x^2 \cdot y$.
An der Basisstelle $(2, 1)$ ist $f(2, 1) = 14 - 6 - 2 + 4 = 10$, $f'_x(2, 1) = -3 + 4 = 1$, $f'_y(2, 1) = -2 + 8 = 6$. Also $\mathcal{E}_x^f(2, 1) = 2 \cdot 1/10 = 0.2$ und $\mathcal{E}_y^f(2, 1) = 1 \cdot 6/10 = 0.6$.

**(b)** $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = 0.2 \cdot (+10\%) + 0.6 \cdot (-5\%) = 2\% - 3\% = -1\%$
d.h. die relative Veränderung von $f(2, 1) = 6$ zu $f(2.2, 0.95)$ ist ca. $-1\%$.

[8] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 9 + 3 \cdot x - 3 \cdot y - (x-2)^3 + \frac{3}{8} \cdot y^2 \qquad (x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> *und* die zugehörigen Funktionswerte)

*Ergebniskontrolle*

$f'_x(x,y) = 3 - 3 \cdot (x-2)^2, \quad f'_y(x,y) = -3 + \frac{3}{4}y;$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'_x & = & 0 \\ f'_y & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 1 - (x-2)^2 & = & 0 \\ -1 + \frac{1}{4}y & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 1 \ \ \underline{\text{oder}} \ \ x = 3 \\ y \ = \ 4 \end{array} \right\}$$

Also sind die stationären Punkte: $P_1 = (1,4)$ und $P_2 = (3,4)$.

$f''_{xx}(x,y) = -6 \cdot (x-2), \qquad f''_{yy}(x,y) = 3/4, \qquad f''_{xy}(x,y) = 0 = f''_{yx}(x,y).$

[Hier die Variante, erst $H_D = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ an der Stelle $(x_0, y_0)$ allgemein auszurechnen und dann die stationären Punkte $(x_0, y_0)$ einzusetzen:]

$H_D(x_0,y_0) = (f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2)(x_0,y_0) = -6 \cdot (x_0 - 2)(3/4) - 0 = \frac{9}{2} \cdot (2 - x_0)$

Insgesamt ist also:

- $H_D(1,4) = \frac{9}{2} \cdot 1 > 0$ und $f''_{xx}(1,4) = 6 > 0$, also $(1,4)$ eine lokale Minimalstelle;
  zugehöriger Funktionswert $f(1,4) = 9 + 3 - 12 - (-1) + \frac{3}{8} \cdot 16 = 7.$
- $H_D(3,4) = \frac{9}{2} \cdot (-1) < 0$, also $(3,4)$ Sattelpunktstelle;
  zugehöriger Funktionswert $f(3,4) = 9 + 9 - 12 - 1 + \frac{3}{8} \cdot 16 = 11.$

*Zum Vergleich:* So sieht die Funktion im Bereich ihrer stationären Punkte aus — ein Liegestuhl für Ihre Mathe-Ferien!