Mathematik für Ökonomen — SS 2010 — Campus Duisburg
U. Herkenrath/H. Hoch, Fachbereich Mathematik

Klausur Mathematik 1

27. Juli 2010, 12:30–14:30 Uhr (120 Minuten)

- *Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  *Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muß **geheftet** bleiben.*
- *Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.*
- *Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

*Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,*
davon 7 Aufgaben mit jeweils 4–6 erreichbaren Punkten
und 2 Aufgaben (Nrn. 1 und 9) mit 8–10 erreichbaren Punkten.
*Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.*
*Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!***

Matrikelnummer ______________________

NAME ______________________

Vornamen ______________________

Geburtsdatum ______________________

Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ______________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings schon sehr ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.

Alle (Teil-)Aufgaben werden ausführlich, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

[4] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $y - x \leq 1$

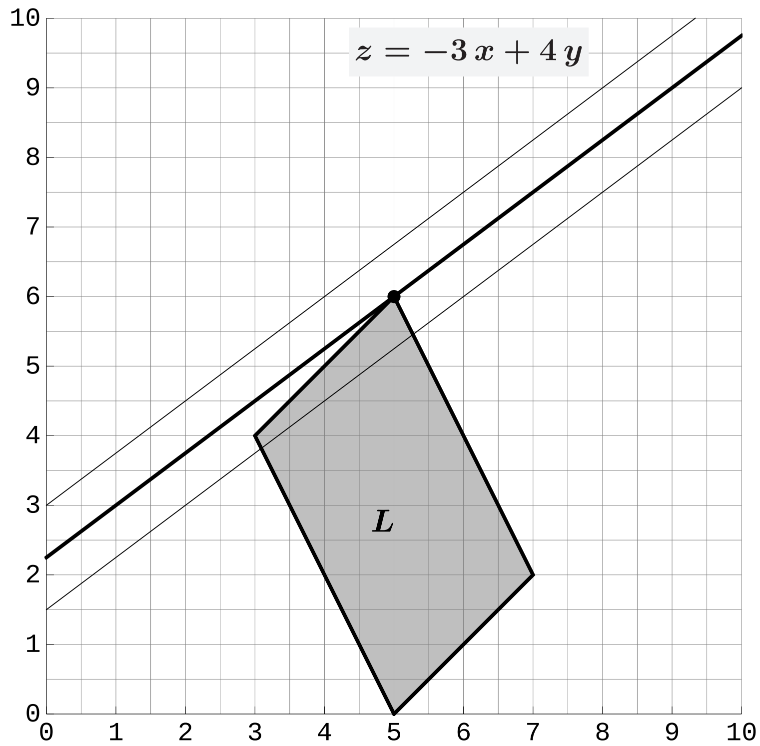
(2) $y + 2x \leq 16$

(3) $y - x \geq -5$

(4) $y + 2x \geq 10$

Ergebniskontrolle

$$L = \{(x, y): \ y \leq 1+x \ \text{ und } \ y \leq 16-2x \ \text{ und } \ y \geq -5+x \ \text{ und } \ y \geq 10-2x\}$$



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = -3x + 4y}$ „halbgraphisch“ : *Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n)* (x_0, y_0) *markieren, Maximalstelle* (x_0, y_0) *und Maximalwert* z_0 *rechnerisch bestimmen.*

Ergebniskontrolle

Zielgeradenschar in (x, y)-Koordinaten: $y = \frac{1}{4}\,z + \frac{3}{4}\,x$.

Der Koeffizient von z (bzw. der Koeffizient von y in der Zielfunktion) ist positiv, also bedeutet Maximierung von z eine parallele Verschiebung nach oben:

Maximalstelle: $x_0 = 5, \quad y_0 = 6$ und Maximalwert: $z_0 = 9$.

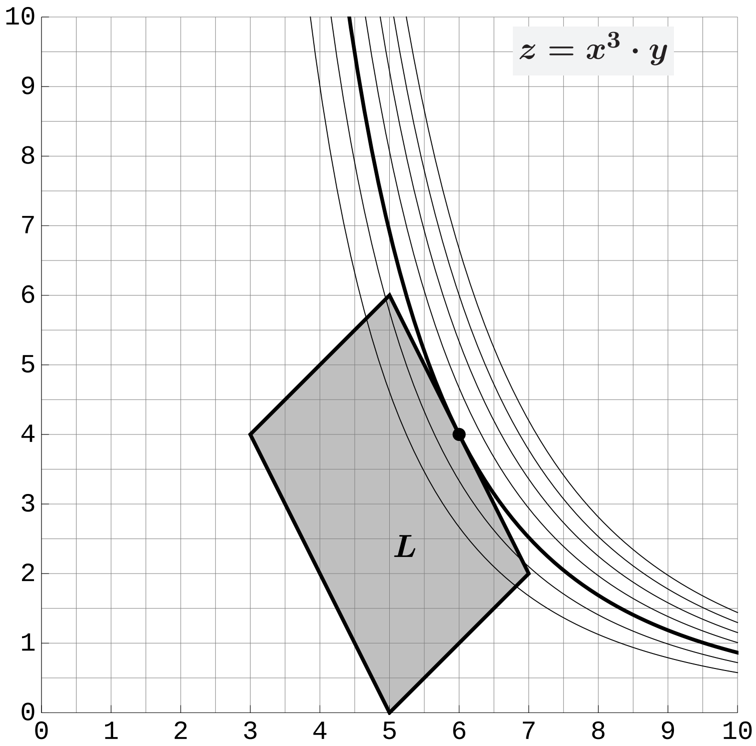
(x_0, y_0) ergibt sich aus dem Schnittpunkt der (nach y aufgelösten) Beschränkungslinien

$$(1)\ y = 1 + x \quad \text{und} \quad (2)\ y = 16 - 2x$$

z.B. so: $1 + x = y = 16 - 2x$, also $3x = 15$, d.h. $x_0 = 5$ und $y_0 \overset{(1)}{=} 1 + x_0 = 6$,
und damit $z_0 = -3\,x_0 + 4\,y_0 = 9$.

[3] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $\boldsymbol{z = x^3 \cdot y}$ „halbgraphisch“ : *Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalen z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren, Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.*

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) *korrekt* in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage: Anhangseite 1)

Ergebniskontrolle

Maximalstelle: $x_0 = 6$, $y_0 = 4$ und Maximalwert: $z_0 = 6^3 \cdot 4 = 864$.

(x_0, y_0) ergibt sich z.B. aus dem Einsetzen der (optisch erkannten) relevanten Beschränkungsgerade (2) $y = 16 - 2x$ in die Zielfunktion:

$z = f(x) = x^3(16 - 2x) = 16 \cdot x^3 - 2 \cdot x^4$ mit der Ableitung

$$f'(x) = 48\,x^2 - 8\,x^3 \qquad (x > 0)$$

$f'(x) = 0$ liefert $48x^2 = 8x^3$. Da $x \neq 0$, folgt $x = 6$. Also ist die Maximalstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 6$ und $y_0 \overset{(2)}{=} 16 - 2x_0 = 4$ [offensichtlich $(6, 4) \in$ Lösungsmenge des LUGS] und damit $z_0 = x_0^3 \cdot y_0 = 6^3 \cdot 4 = 216 \cdot 4 = 864$.

[*Hinweis, auch im Hinblick auf Mathe 2:* Hier wird das allgemeine Ergebnis verwendet, dass bei diesem Typ Zielfunktion Nullsetzen der ersten Ableitung nur Kandidaten für Maxima liefern kann (niemals Minima).]

[6] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot n^3 - 3\cdot n^4}{4\cdot n^3 - 2\cdot n^4} = ?$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} 12\cdot\big(-\dfrac{1}{3}\big)^k = ?$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\big(\frac{1}{1+x}\big)^i = ?$ (wobei $0 < x$ fix). *Untere Summengrenzen beachtet?*

Ergebniskontrolle

(a) $\dfrac{3}{2}$

(b) $12\cdot\big(-\dfrac{1}{3}\big)^2\cdot\dfrac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = 12\cdot\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{3}{4} = 1.$

(c) Da $0 < x$ ist $0 < \frac{1}{1+x} < 1$, also erfüllt $q := \frac{1}{1+x}$ die Konvergenzbedingung $|q| < 1$.

Somit ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\big(\frac{1}{1+x}\big)^i = \frac{\frac{1}{1+x}}{1-\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1+x-1} = \frac{1}{x}.$

[4] Eine endliche Folge von monatlichen Zahlungen a_i, $i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag d zunehmen, soll sich in n Monaten zu einem Wert s_n aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $d = 2$ und $n = 20$ werden festgelegt. Welchen Wert muss die erste Zahlung a_1 haben, damit das Summenziel $s_{20} = 400$ mit der letzten Zahlung a_{20} genau erreicht wird? Und wie hoch ist dann diese letzte Zahlung a_{20}?

Ergebniskontrolle

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe]

(b) $d = 2$, $n = 20$, $s_{20} = 400 \Rightarrow 400 = 20 \cdot a_1 + \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 2 \Rightarrow 400 - 380 = 20 \cdot a_1 \Rightarrow a_1 = 1$. Damit ist $a_{20} = 1 + (20-1) \cdot 2 = 39$.

Aufgabe 4 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus. Hierbei ist **E** die 3×3-Einheitsmatrix

und $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{3\times 1} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

(a) $(\mathbf{E} + A) \cdot B$

(b) $C \cdot C^T$

Ergebniskontrolle

(a) $E + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $(E + A)_{3\times 3} \cdot B_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}_{3\times 1}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen M_{RZ} und M_{ZE} gegeben:

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	2	1	1
	R_2	4	2	1

		Endprodukte	
		E_1	E_2
Zwischen-	Z_1	0	1
produkte	Z_2	2	2
	Z_3	1	1

Rohstoffpreise $r = (\, r_1 \quad r_2 \,) = (\, 5 \quad 1 \,)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ bzw.

		Endprodukte	
		E_1	E_2
Rohstoffe	R_1	3	5
	R_2	5	9

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 52 \\ 90 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (\, 5 \quad 1 \,) \cdot \begin{pmatrix} 52 \\ 90 \end{pmatrix} = 350.$

Aufgabe 6 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins), ein Anfangswert $K_0 > 0$ und ein Zielwert K_x, der um 44% über dem Anfangswert liegen soll.

(a) Gegeben: Laufzeit $n = 2$ (d.h. $K_x = K_2$). Erforderliche Rendite $\mathfrak{i} = p\% = ?$

(b) Gegeben: $\mathfrak{i} = 4\%$. Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

Hilfswerte: $\ln 0.04 \approx -3.219$, $\ln 0.44 \approx -0.821$, $\ln 1.04 \approx 0.039$, $\ln 1.44 \approx 0.365$.

Ergebniskontrolle $K_x = 1.44 \cdot K_0$.

(a) $1.44 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + \mathfrak{i})^2 \;\Leftrightarrow\; 1 + \mathfrak{i} = 1.44^{1/2} = 1.2 \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{i} = 0.2 = 20\%.$

(b) $K_x = K_0 \cdot (1.04)^x \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{\ln(K_x/K_0)}{\ln(1.04)} = \dfrac{\ln(1.44)}{\ln(1.04)} \approx \dfrac{0.365}{0.039} = 10 - \dfrac{25}{39};\; n = \lceil x \rceil = 10.$

Aufgabe 7 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{4}{3+e^{2-|x|}} \leq 1.$$

Ergebniskontrolle $L = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\}$, denn

$$\begin{aligned}
\tfrac{4}{3+e^{2-|x|}} \leq 1 \;\Leftrightarrow\;\; 4 &\leq 3 + e^{2-|x|} && \text{[weil } 3 + e^z > 0 \text{ für jedes } z \in \mathbb{R}] \\
\Leftrightarrow\;\; 1 &\leq e^{2-|x|} && \\
\Leftrightarrow\;\; \ln 1 &\leq 2 - |x| && \text{[weil } e^z \text{ und } \ln z \text{ strikt monoton wachsen]} \\
\Leftrightarrow\;\; |x| &\leq 2 && \text{[weil } \ln 1 = 0] \\
\Leftrightarrow\;\; -2 &\leq x \leq 2. && \textit{Andere Ergebnisdarstellung: } L = [-2,\, 2]
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Bestimmen Sie die Lösungsmengen der beiden folgenden linearen Gleichungssysteme simultan mit Hilfe des Gauß-(Jordan-)Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).

[Geprüft wird, an einem einfachen Beispiel, die Beherrschung der Methode — eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.]

$$\begin{array}{rcrcrcr|r|r|}
 & & & & & & & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\
1\cdot x_1 & + & 3\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & & 3 & 1 \\
1\cdot x_1 & - & 1\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & & -5 & 1 \\
3\cdot x_1 & + & 5\cdot x_2 & + & 6\cdot x_3 & = & & 1 & 1
\end{array}$$

Ergebniskontrolle

x_1	x_2	x_3 =	a	b	*Protokollbsp.*
1	3	2	3	1	I
1	−1	2	−5	1	II
3	5	6	1	1	III
1	3	2	3	1	$\mathbf{I}$
0	−4	0	−8	0	$II - 1\cdot\mathbf{I}$
0	−4	0	−8	−2	$III - 3\cdot\mathbf{I}$
1	3	2	3	1	I
0	1	0	2	0	$II/(-4)$
0	−4	0	−8	−2	III
1	0	2	−3	1	$I - 3\cdot\mathbf{II}$
0	1	0	2	0	$\mathbf{II}$
0	0	0	0	−2	$III + 4\cdot\mathbf{II}$

$$\mathbb{L}_a = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{array}{rcl} x_1 & = & -3 - 2\cdot x_3 \\ x_2 & = & 2 \\ \multicolumn{3}{l}{x_3 \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar}} \end{array} \right\}, \qquad \mathbb{L}_b = \emptyset \text{ (nicht lösbar).}$$

Aufgabe 9 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[8] Gegeben ist die Matrixgleichung $A \cdot X \cdot A = B.$

Hierbei sind X unbekannt und $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-(Jordan-)Algorithmus die Inverse von A und dann die Lösung für X.

[*Hinweis: Dies ist die angekündigte Aufgabe mit einem weniger geübten Aufgabenteil*]

Ergebniskontrolle

	x_1	x_2	x_3	$= a$	b	c	*Protokollbsp.*
A	1	−2	−5	1	0	0	*I*
	0	1	2	0	1	0	*II*
	−1	−1	0	0	0	1	*III*
	1	−2	−5	1	0	0	**I**
	0	1	2	0	1	0	*II*
	0	−3	−5	1	0	1	$III + 1 \cdot \mathbf{I}$
	1	0	−1	1	2	0	$I + 2 \cdot \mathbf{II}$
	0	1	2	0	1	0	**II**
	0	0	1	1	3	1	$III + 3 \cdot \mathbf{II}$
	1	0	0	2	5	1	$I + 1 \cdot \mathbf{III}$
	0	1	0	−2	−5	−2	$II - 2 \cdot \mathbf{III}$
	0	0	1	1	3	1	**III**

Also ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -2 & -5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und damit $X = A^{-1} \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 24 & 0 \\ -9 & -27 & 0 \\ 5 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

[Mögl. Zwischenergebnisse $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ -9 & -9 & -9 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ bzw. $B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$]