U. Herkenrath/H. Hoch, Fachbereich Mathematik

Klausur Mathematik 2

27. Juli 2010, 10:00–12:00 Uhr (120 Minuten)

- *Erlaubte* ***Hilfsmittel****: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.*
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel — so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie ***Handy*** *oder Rechner jeder Art — wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.*
- *Die Klausur muss* ***geheftet*** *bleiben.*
- *Bei* ***Klausurunterbrechung*** *müssen die Klausur <u>und</u> ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher* ***keine vorzeitige Abgabe*** *möglich.*
- *Während der Klausur können* ***keine Fragen*** *zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.*

Die Klausur besteht aus ***10 Aufgaben****,*
davon 9 Aufgaben mit jeweils 4–6 erreichbaren Punkten
und 1 Aufgabe (Nr. 10) mit 9 erreichbaren Punkten.
Insgesamt sind **50** ***Punkte*** *erreichbar.*
Ab erreichten **23** ***Punkten*** *ist die Klausur bestanden,* ***gutes Gelingen!***

Matrikelnummer ______________________________

NAME ______________________________

Vornamen ______________________________

Geburtsdatum ______________________________

Ich habe obige Punkte gelesen. Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ______________________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind <u>keine</u> Musterlösungen, sondern (allerdings schon sehr ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer — als „Nach-der-Klausur-Service“.

Alle (Teil-)Aufgaben werden <u>ausführlich</u>, in passendem Themenzusammenhang, im nächsten Semester in den Veranstaltungen besprochen.
Dieses Exemplar ist also allenfalls eine (teilweise zu ergänzende) Arbeitsunterlage.

Aufgabe 1

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen

[4] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α und β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle" $x_0 = 4$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot x^{3/2} & \text{für } 1 \leq x < 4 \\ 8 & \text{für } x = 4 \\ (x-\beta)^3 & \text{für } 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle

LGW in x_0: $\alpha \cdot 4^{3/2} = \alpha \cdot 8$, Funktionswert (FW) in x_0 : 8, RGW in x_0: $(4-\beta)^3$.

$$f \text{ stetig in } x_0 = 4 \iff \text{LGW=FW=RGW in } x_0,$$

d.h. $8\alpha = 8$ und $8 = (4-\beta)^3$, also $\alpha = 1$ und $2 = 4 - \beta$.
Also ist f stetig in x_0 mit der Festlegung: $\alpha = 1$ und $\beta = 2$.

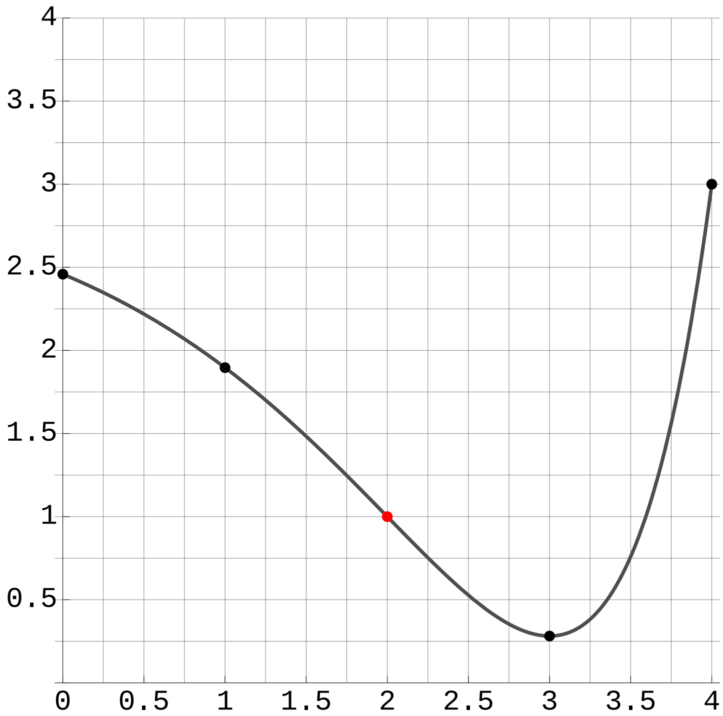
Aufgabe 2 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[6] Gegeben $f(x) = 3 + (x-4) \cdot e^{x-2}$ mit $D(f) = [0, 4]$. *Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!*

f hat die Ableitung $f'(x) = (x-3) \cdot e^{x-2}$ und die lokale Minimalstelle $x = 3$ mit Wert $f(3) \approx 0.28$.

(a) Untersuchen Sie auf Basis dieser Informationen das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkt) und skizzieren Sie f.

[Bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen; folgende Hilfswerte sind bereits eingetragen: $f(0) \approx 2.46$, $f(1) \approx 1.90$, $f(3) \approx 0.28$, $f(4) = 3$]



Ergebniskontrolle

$f''(x) = 1 \cdot e^{x-2} + (x-3) \cdot e^{x-2} = (x-2) \cdot e^{x-2}$.
Wegen $e^{x-2} > 0$ für alle x gilt: Vorzeichen von $f''(x)$ = Vorzeichen von $(x-2)$ für alle $x \in D(f) = [0,4]$:

Also $f''(x) \leq 0$ für alle $x \leq 2$, d.h. f konkav über $[0,2]$,
und $f''(x) \geq 0$ für alle $x \geq 2$, d.h. f konvex über $[2,4]$.
Wendepunkt an der Stelle $x = 2$ mit Wert $f(2) = 3 + (2-4) \cdot e^{2-2} = 1$.

(b) Bestimmen Sie die Elastizitätsfunktion $\mathcal{E}^f(x)$ der obigen Funktion f und damit an der Basisstelle $x_0 = 2$ die (ungefähre) relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ gegenüber $f(2)$ bei einer relativen Erhöhung von x gegenüber $x_0 = 2$ um 5%.

Ergebniskontrolle

$\mathcal{E}^f(x) = x \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \dfrac{(x-3) \cdot e^{x-2}}{3 + (x-4) \cdot e^{x-2}}$. Für $x_0 = 2$ ist $\dfrac{df}{f} \approx \mathcal{E}^f(2) \cdot 5\%$.
Mit $f(2) = 3 + (-2) \cdot e^0 = 1$ [siehe auch (a)] und $f'(2) = (-1) \cdot e^0 = -1$ ist $\mathcal{E}^f(2) = -2$, also $\dfrac{df}{f} \approx -2 \cdot 5\% = -10\%$ [oder als % von 1: $\dfrac{df}{f} \approx -2 \cdot 0.05 = -0.1$]
[*Zum Vergleich:* Unsere Näherung $f(2) \cdot 0.9 = 0.9$ und „exakt“: $f(2.1) = 0.9002$]

Aufgabe 3 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \ln x}{2 \cdot x + 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x^{3/2}}$

Ergebniskontrolle

Zweimal LHR $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \ln x}{2 \cdot x + 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x^{3/2}}$ [Beachte: $\ln 1 = 0$]

$$\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{4 \cdot x \cdot \ln x}{2 + 4 \cdot x - 6 \cdot x^{1/2}} \overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{4 + 4 \cdot \ln x}{4 - 3 \cdot x^{-1/2}} = \frac{4}{1} = 4.$$

Aufgabe 4 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[4] Zur Berechnung eines effektiven Zinsfaktors x ist die folgende Bestimmungsgleichung für x zu lösen:

$$x^4 + x^3 + x^2 \stackrel{!}{=} 3.9$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von x mit Hilfe des Newton-Verfahrens, d.h. gefragt sind: *Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert* $x_0 = 1$, *eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (einsetzen, nicht ausrechnen).*

Ergebniskontrolle

$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 3.9 \stackrel{!}{=} 0, \;\; f'(x) = 4\,x^3 + 3\,x^2 + 2\,x;$

Beim Startwert $x_0 = 1$ ist also $f(1) = -0.9$ und $f'(1) = 9$.

- Allgemeiner Ansatz: $x_{n+1} = x_n - (\, f(x_n)/f'(x_n)\,)\,, n \in \mathbb{N}_0;$
- Erste Iteration: $x_1 = x_0 - (\, f(x_0)/f'(x_0)\,) = 1 - (\, f(1)/f'(1)\,) = 1 - (\,-0.9/9\,) = 1.1;$
- Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.1 - \dfrac{f(1.1)}{f'(1.1)}$

  $[= 1.1 - \dfrac{1.1^4 + 1.1^3 + 1.1^2 - 3.9}{4 \cdot 1.1^3 + 3 \cdot 1.1^2 + 2 \cdot 1.1} \qquad [\approx 1.09058]].$

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^e f(t)\,dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 6 \cdot t^{1/2} & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 2 \cdot e^{-1} & \text{für } t = 1 \\ 2 \cdot t^{-1} & \text{für } 1 < t \leq e \end{cases}$

Ergebniskontrolle

$$\begin{aligned} \int_0^e f(t)\,dt &= \int_0^1 6 \cdot t^{1/2}\,dt + \int_1^e 2 \cdot t^{-1}\,dt = \left[6 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot t^{3/2}\right]_0^1 + \left[2 \cdot \ln t\right]_1^e \\ &= 4 \cdot (1^{3/2} - 0^{3/2}) + 2 \cdot (\ln e - \ln 1) = 4 \cdot (1-0) + 2 \cdot (1-0) = 6. \end{aligned}$$

[5] Für $8 \leq x \leq 60$ sei $F(x) := F(8) + \int_8^x (11 - (2t)^{1/2})\ dt$, wobei $F(8)$ fix vorgegeben ist.

(a) Berechnen Sie den Wert $F(50)$.

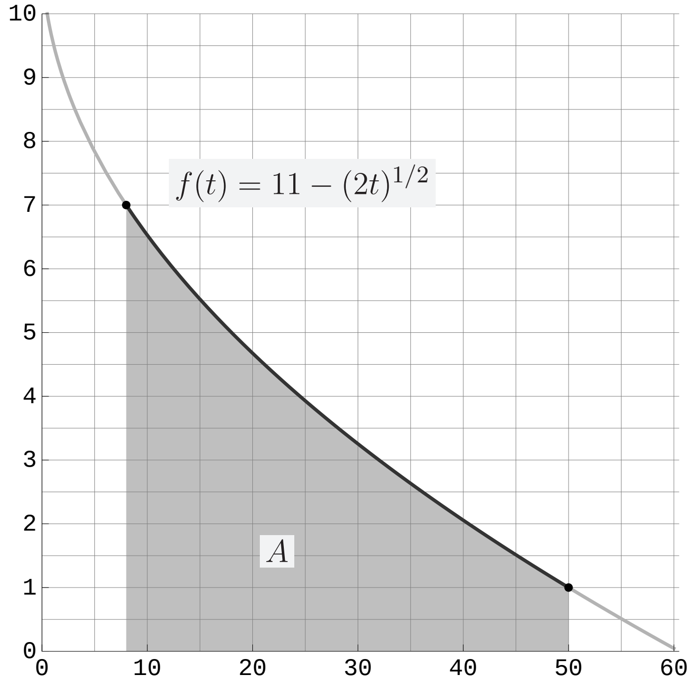
(b) Skizzieren Sie das durch das Integral $\int_8^{50} (11 - (2t)^{1/2})\ dt$ berechnete Flächenstück.

Ergebniskontrolle

(a) $F(50) = F(8) + \int_8^{50} (11 - (2t)^{1/2})\ dt$, wobei

$$A = \int_8^{50} (11 - (2t)^{1/2})\ dt = [11 \cdot t - \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2}(2t)^{3/2}]_8^{50}$$
$$= (550 - 10^3/3) - (88 - 4^3/3)$$
$$= \tfrac{1}{3} \cdot (1650 - 1000 - 264 + 64) = 150.$$

(b) Die Fläche zwischen dem Intervall $[8, 50]$ auf der t-Achse und dem zugehörigen Stück der Kurve $f(t) = 11 - (2t)^{1/2}$.



[4] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad $n = 2$) der Funktion $f(x) = e^{1-x^2}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ und damit eine Näherung für den Wert $f(1.1) = e^{-0.21}$.

Ergebniskontrolle

$f(1) = 1;\quad f'(x) = (-2x)e^{1-x^2},\quad f'(1) = -2;$
$f''(x) = (-2)e^{1-x^2} + (-2x)(-2x)e^{1-x^2} = (-2+4x^2)e^{1-x^2},\quad f''(1) = 2;$

$$\begin{aligned} T_2^f(x;x_0) &:= f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1 + \tfrac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 \\ &= 1 - 2\cdot(x-1) + 1\cdot(x-1)^2 \qquad [\text{mit } x_0 = 1]. \end{aligned}$$

Damit ist $f(1.1) \approx T_2^f(1.1;1) = 1 - 2\cdot(1.1-1) + 1\cdot(1.1-1)^2 = 0.81.$

Aufgabe 8 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[5] Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = (x-y) \cdot e^{1-y}$ $(x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen $f'_x,\ f'_y,$ sowie $f''_{xx},\ f''_{yy}$ und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle

$f'_x(x,y) = e^{1-y};$

$f'_y(x,y) = (-1) \cdot e^{1-y} + (x-y) \cdot e^{1-y} \cdot (-1) = (-1-x+y) \cdot e^{1-y};$

$f''_{xx}(x,y) = 0;$

$f''_{yy}(x,y) = 1 \cdot e^{1-y} + (-1-x+y) \cdot e^{1-y} \cdot (-1) = (2+x-y) \cdot e^{1-y};$

$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -e^{1-y}.$

[5] Gegeben sind die Funktion $f(x,y) = (x-y)\cdot e^{x-1}$
und die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 2$ und $y_0 = 1$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die x-Variable um $+3\%$ und die y-Variable um $+8\%$ verändert.

Ergebniskontrolle

(a) $f(x,y) = (x-y)\cdot e^{x-1}$;
$f'_x(x,y) = 1\cdot e^{x-1} + (x-y)\cdot e^{x-1} = (1+x-y)\cdot e^{x-1}$;
$f'_y(x,y) = (-1)\cdot e^{x-1}$;
$\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) = x_0\cdot f'_x(x_0,y_0)/f(x_0,y_0) = x_0\cdot\frac{(1+x_0-y_0)}{x_0-y_0}$; $\mathcal{E}_x^f(2,1) = 2\cdot(1+1)/1 = 4$;
$\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) = y_0\cdot f'_y(x_0,y_0)/f(x_0,y_0) = y_0\cdot\frac{-1}{x_0-y_0}$; $\mathcal{E}_y^f(2,1) = 1\cdot(-1)/1 = -1$.

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0,y_0)\cdot\frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0,y_0)\cdot\frac{dy}{y_0} = 4\cdot(3\%) + (-1)\cdot(8\%) = 4\%$.
[d.h. die relative Veränderung von $f(2,1)$ zu $f(2.06, 1.08)$ ist ca. $+4\%$,
zum Vergleich „exakt“: $\frac{f(2.06,1.08)-f(2,1)}{f(2,1)} = 0.0406\%$].

Aufgabe 10 *Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte auch darauf hinweisen*

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = y \cdot (y-x) \cdot e^{-x-y} = (y^2 - x \cdot y) \cdot e^{-x-y} \qquad (x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> *und* die zugehörigen Funktionswerte)

Die zweiten partiellen Ableitungen sind hierbei gegeben:

$$f''_{xx}(x,y) \;=\; y \cdot (2 - x + y) \cdot e^{-x-y};$$
$$f''_{yy}(x,y) \;=\; (2 + 2x - x \cdot y - 4y + y^2) \cdot e^{-x-y};$$
$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) \;=\; (-1 + x - y - x \cdot y + y^2) \cdot e^{-x-y};$$

[*Hinweis: Dies ist die angekündigte Aufgabe mit einem weniger geübten Aufgaben<u>teil</u>*]

Ergebniskontrolle

$$f(x,y) = y \cdot (y-x) \cdot e^{-x-y} = (y^2 - x \cdot y) \cdot e^{-x-y}$$
$$f'_x(x,y) = -y \cdot e^{-x-y} - y \cdot (y-x) \cdot e^{-x-y} \;=\; y \cdot (-1 - y + x) \cdot e^{-x-y}$$
$$f'_y(x,y) \;=\; (2 \cdot y - x - y^2 + x \cdot y) \cdot e^{-x-y};$$

Bestimmung der stationären Punkte (beachte, dass $e^z > 0$ für jedes $z \in \mathbb{R}$):

$$\left\{\begin{aligned} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} y \cdot (-1 - y + x) &= 0 \\ 2 \cdot y - x - y^2 + x \cdot y &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &y = 0 \ \ \underline{\text{oder}} \ \ y = x - 1 \\ &2 \cdot y - x - y^2 + x \cdot y \ = 0 \end{aligned}\right\}$$

Fall 1: $y = 0$ und $0 - x - 0 + 0 = 0$, also $x = 0$.
Fall 2: $y = x - 1$ und $2 \cdot (x-1) - x - (x-1)^2 + x \cdot (x-1) = 0$, also $2x - 3 = 0$,
d.h. $x = 3/2$ und $y = x - 1 = 1/2$.

Stationäre Punkte: $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = (3/2, 1/2)$.

[Hier die Variante, $H_D = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) direkt auszurechnen:]

Mit den gegebenen zweiten partiellen Ableitungen ist: $f''_{xx}(0,0) = 0$ und $f''_{xy}(0,0) \;=\; -1$, also $H_D(0,0) = (f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2)(0,0) = 0 - (-1)^2 = -1$.
Ferner $f''_{xx}(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \;=\; \frac{1}{2}(2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2})e^{-2}$ und $f''_{yy}(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \;=\; (2 + \frac{2\cdot 3}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{2} - \frac{4}{2} + \frac{1}{4})e^{-2}$ und $f''_{xy}(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \;=\; (-1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{4})e^{-2}$,
also $H_D(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = (f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2)(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{-2} \cdot \frac{5}{2}e^{-2} - (-\frac{1}{2}e^{-2})^2 = e^{-4}$.

Insgesamt ist also:

- $H_D(0,0) < 0$, also $(0,0)$ Sattelpunktstelle;
  zugehöriger Funktionswert $f(0,0) = 0$.
- $H_D(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) > 0$ mit $f''_{xx}(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{-2} > 0$,
  also $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ lokale Minimalstelle;
  zugehöriger Funktionswert $f(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-2}$.

Zum Vergleich: So sieht die Funktion im Bereich ihrer stationären Punkte aus.