Mathematik für Ökonomen – SS 2011 – Campus Duisburg

Prof. Dr. U. Herkenrath, Fakultät Mathematik

Klausur Mathematik 1

19.07.2011, 8:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Matrikelnummer ____________________

Name ____________________

Vorname ____________________

Geburtsdatum ____________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings teils ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer - als „Nach-der-Klausur-Service".

Einige Aufgaben lassen sich auf verschiedenen Wegen lösen und sofern keine besondere Methode verlangt wurde, ist jeder nachvollziehbare Rechenweg auch in Ordnung.

[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

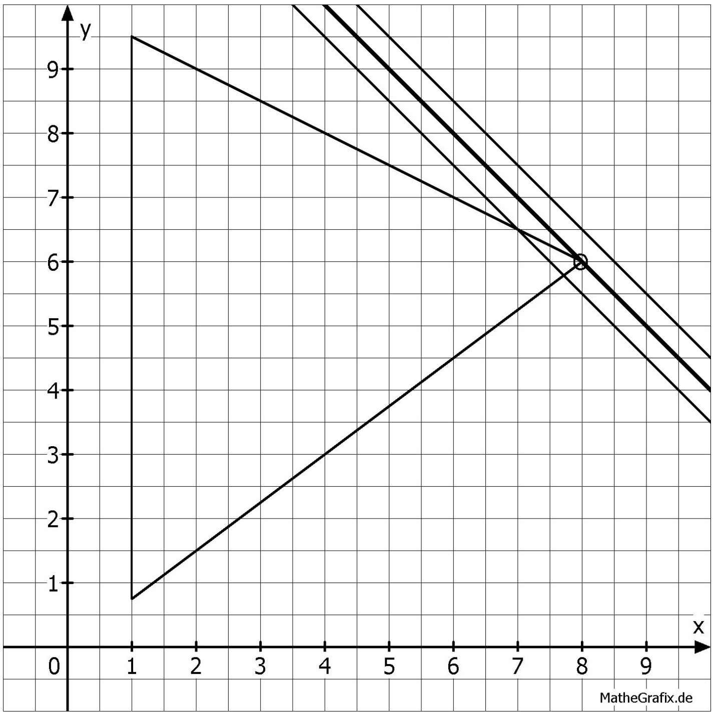
(1) $y + \frac{1}{2}x \leq 10$

(2) $y - \frac{3}{4}x \geq 0$

(3) $x \geq 1$

Ergebniskontrolle:

$$L = \{(x, y) : y \leq 10 - \frac{1}{2}x \text{ und } y \geq \frac{3}{4}x \text{ und } x \geq 1\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

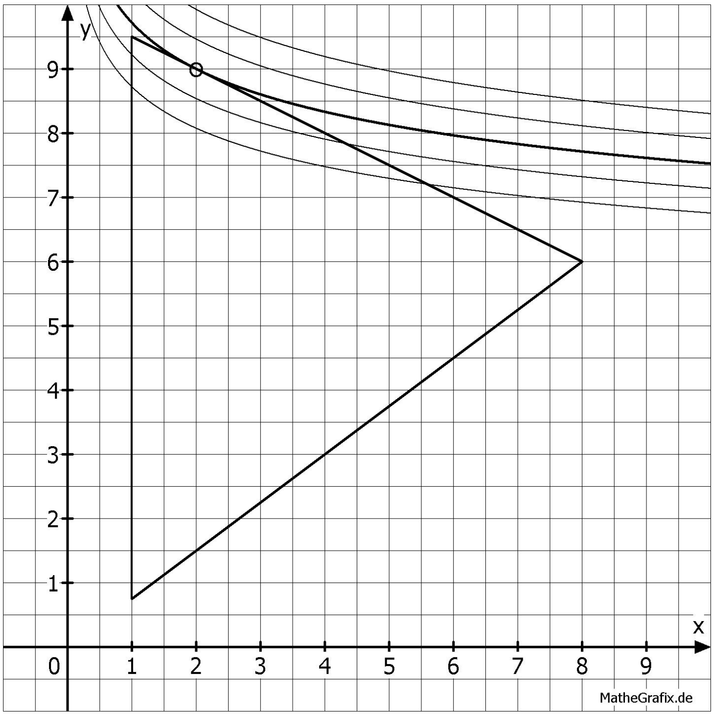
[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x + y$ „halbgraphisch“ : Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) <u>und</u> Maximalwert z_0 <u>rechnerisch</u> bestimmen.

Ergebniskontrolle:

Zielgeradenschar: $y = z - x$.
Da $b > 0$ in $z = ax + by$, bedeutet Maximierung von z eine Verschiebung nach oben. Die Maximalstelle (x_0, y_0) ergibt sich als Schnittpunkt der Beschränkungsgeraden (1) $y = 10 - \frac{1}{2}x$ und (2) $y = \frac{3}{4}x$. Gleichsetzen von (1) und (2) liefert $10 - \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}x$ und damit $x_0 = 8$. Eingesetzt in (1) oder (2) erhält man $y_0 = 6$. Die Maximalstelle $(x_0 = 8, y_0 = 6)$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt den Maximalwert $z_0 = 14$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x^{\frac{1}{9}}y$ „halbgraphisch“ : Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalem z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) korrekt in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Ergebniskontrolle:

Maximalstelle $(x_0 = 2, y_0 = 9)$ und Maximalwert $z_0 = 2^{1/9} \cdot 9$ [≈ 9.72054]
Optisch ergibt sich (1) als relevante Beschränkungsgerade. Einsetzen von (1) $10 - \frac{1}{2}x$ in die Zielfunktion: $z = f(x) = x^{1/9} \cdot (10 - \frac{1}{2}x) = 10x^{1/9} - \frac{1}{2}x^{10/9}$. Die erste Ableitung $f'(x) = \frac{10}{9}x^{-8/9} - \frac{10}{18}x^{1/9}$ gleich 0 setzen, liefert $x_0 = 2$. Einsetzen in die Beschränkungsgerade liefert $y_0 = 9$. Die Maximalstelle $(x_0 = 2, y_0 = 9)$ ist offenbar $\in L$ und damit ergibt sich der Maximalwert durch einsetzen in die Zielfunktion: $z_0 = 2^{1/9} \cdot 9$.

[6] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7\cdot n^2 \; - \; 4\cdot n^3}{5\cdot n^3 \; - \; 6\cdot n^2} = \; ?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=2}^{n} \sqrt{(\frac{1}{4})^i} = \; ?$

Untere Summengrenze beachtet?

Ergebniskontrolle:

(a) $= -\frac{4}{5}$

(b) $= \sum\limits_{i=0}^{\infty} \sqrt{(\frac{1}{4})^{i+2}} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\sqrt{(\frac{1}{4})}\right)^{i+2} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^{i+2} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i}$ (da $|\frac{1}{2}| < 1$)

$= (\frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$

[4] Eine endliche Folge von monatlichen Zahlungen $a_i, i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag $|d|$ abnehmen, soll sich in n Monaten zu einem Wert s_n aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $n = 6$ und $|d| = 3$ (d.h. $d =$ -3) werden festgelegt. Welchen Wert muss die erste Zahlung a_1 haben, damit das Summenziel $s_n = 63$ mit der letzten Zahlung a_6 genau erreicht wird? Wie hoch ist dann die 4. Zahlung a_4? (Gefragt ist a_4, nicht a_6!!!)

Ergebniskontrolle:

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe]

(b) $63 = 6 \cdot a_1 + \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot (-3) \Rightarrow 108 = 6 \cdot a_1 \Rightarrow 18 = a_1$

$a_4 = 18 + 3 \cdot (-3) = 9$

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis). Hierbei ist E die 3×3-Einheitsmatrix und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(a) $(A + E) \cdot B^T$

(b) C^{-1}

Ergebniskontrolle:

(a) $A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $(A + E) \cdot B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

(b) nicht definiert!

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

$$\begin{array}{ll} & \text{Endprodukte} \\ & \begin{array}{ccc} E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \text{Zwischenprodukte} \begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \end{array} & \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & \text{Zwischenprod.} \\ & \begin{array}{cc} Z_1 & Z_2 \end{array} \\ \text{Rohstoffe} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} & \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}} \end{array}$$

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2, r_3) = (1, 3, 1)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 17 \\ 19 \\ 17 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (1, 3, 1) \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 19 \\ 17 \end{pmatrix} = 91$

[4] Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins), ein Anfangswert $K_0 > 0$ und ein Zielwert K_x, der um 125% über dem Anfangswert liegen soll.

(a) Gegeben: Laufzeit $n = 2$ (d.h. $K_x = K_2$). Erforderliche Rendite $i = p\% =?$

(b) Gegeben: $i = 25\%$. Erfoderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

Hilfswerte: $\ln 1.025 \approx 0.03$, $\ln 1.125 \approx 0.12$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 2.25 \approx 0.81$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

$K_x = 2.25 \cdot K_0$

(a) $2.25 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^2 \Leftrightarrow 1 + i \approx (2.25)^{\frac{1}{2}} = 1.5 \Leftrightarrow i = 0.5 = 50\%$

(b) $K_x = K_0 \cdot (1.25)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2.25)}{\ln(1.25)} \approx \frac{0.81}{0.22} \approx 3.682$; $n = \lceil x \rceil = 4$

[5] Bestimmen Sie (simultan) die x-Lösungsmenge von:

$$\ln(x+1) > 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{e^x - 1} > 1$$

Ergebniskontrolle:

$\ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow x+1 > e^0 = 1 \Leftrightarrow x > 0$

Wegen $x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0$ und damit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e^x - 1} > 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 > e^x - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 2 > e^x \\ \Leftrightarrow \quad & \ln 2 > x \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich die x-Lösungsmenge als $\{x : x > 0 \text{ und } \ln 2 > x\} = \{x : 0 < x < \ln 2\}$

[4] Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & -5 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Probe gemacht?

Ergebniskontrolle:

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
1	-1	1	1	0	0	I
6	-5	3	0	1	0	II
-2	2	-1	0	0	1	III
1	-1	1	1	0	0	I
0	1	-3	-6	1	0	II - 6I
0	0	1	2	0	1	III + 2I
1	-1	0	-1	0	-1	I - III
0	1	0	0	1	3	II + 3III
0	0	1	2	0	1	III
1	0	0	-1	1	2	I + 2 II
0	1	0	0	1	3	II
0	0	1	2	0	1	III

Probe: $B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = E_{3\times 3}$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{array} \quad \overset{\text{Gauß-Jordan}}{\longrightarrow \cdots \longrightarrow} \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[3] (b) Gegeben sei die Matrixgleichung

$$A \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

(i) Welche Dimension müssen A und B haben?

(ii) Geben Sie eine Lösung für A und B an.

[3] (c) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$Y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus die allgemeine Lösung für Y.

Ergebniskontrolle:

(a) Beim LGS $Ax = b$ ist eine Variable frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & = & -\frac{5}{3} & - & x_3 \\ x_2 & = & \frac{4}{3} & & \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & \end{array} \right\}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ (Durch scharfes Hinsehen - vgl. „Picker“ Thema 5.1)

(c) $Y \cdot A = B \Leftrightarrow A^T \cdot Y^T = B^T$. Die Lösung von $A^T \cdot X = B^T$ (GJ-Algorithmus) ergibt durch transponieren ($Y = X^T$) die Lösung von $Y \cdot A = B$. [Siehe Thema 5.2 / Bsp. 7-8]
Der GJ-Algorithmus ist bereits beim Endtableau angekommen

$$\begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Lösung X von $A^T \cdot X = B^T$ spaltenweise, d.h. Lösung $Y = X^T$ von $Y \cdot A = B$ zeilenweise.

$$L_1 = \{x_1 = x_3,\ x_2 = 1 - x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}, \quad L_2 = \{x_1 = -1 + x_3,\ x_2 = 1 - x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\},$$

wobei die x_3 in L_1 und L_2 unabhängig voneinander frei wählbar sind, d.h.

$Y = \begin{pmatrix} a & 1-a & a \\ -1+b & 1-b & b \end{pmatrix}_{2\times 3}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ frei wählbar.