Mathematik für Ökonomen – SS 2011 – Campus Duisburg

Prof. Dr. U. Herkenrath, Fakultät Mathematik

Klausur Mathematik 2

19. 07. 2011, 11:00-13:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Matrikelnummer ____________________

Name ____________________

Vorname ____________________

Geburtsdatum ____________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____________________

BITTE BEACHTEN

Die nachfolgend bei den Aufgaben genannten Ergebnisse sind keine Musterlösungen, sondern (allerdings teils ausführliche) Ergebniskontrollen für die Klausurteilnehmer - als „Nach-der-Klausur-Service“.

Einige Aufgaben lassen sich auf verschiedenen Wegen lösen und sofern keine besondere Methode verlangt wurde, ist jeder nachvollziehbare Rechenweg auch in Ordnung.

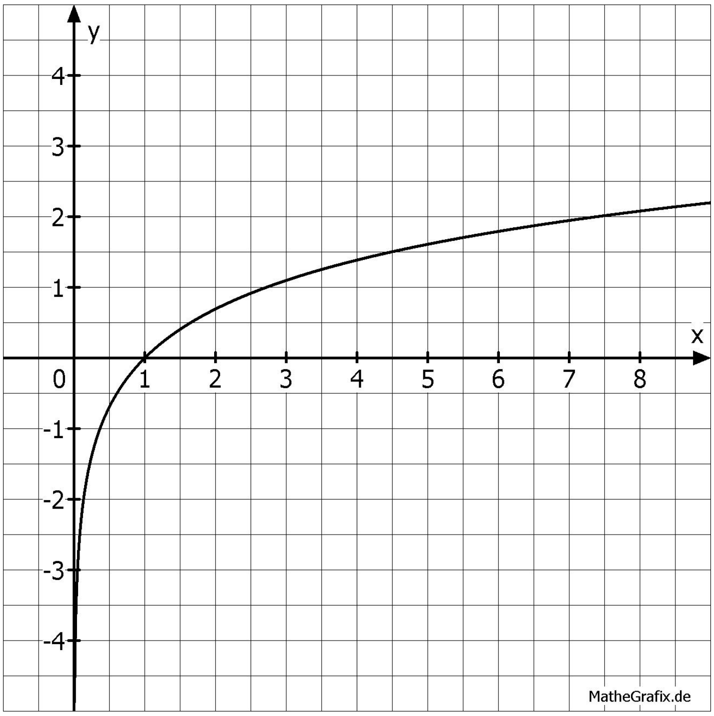
[2] Geben Sie an, die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0+} \ln(x) =?, \ \lim_{x\to\infty} \ln(x) =?$$

und untermauern Sie ihre Ergebnisse, mit einer Skizze des Funktionsverlaufs.

Ergebniskontrolle:

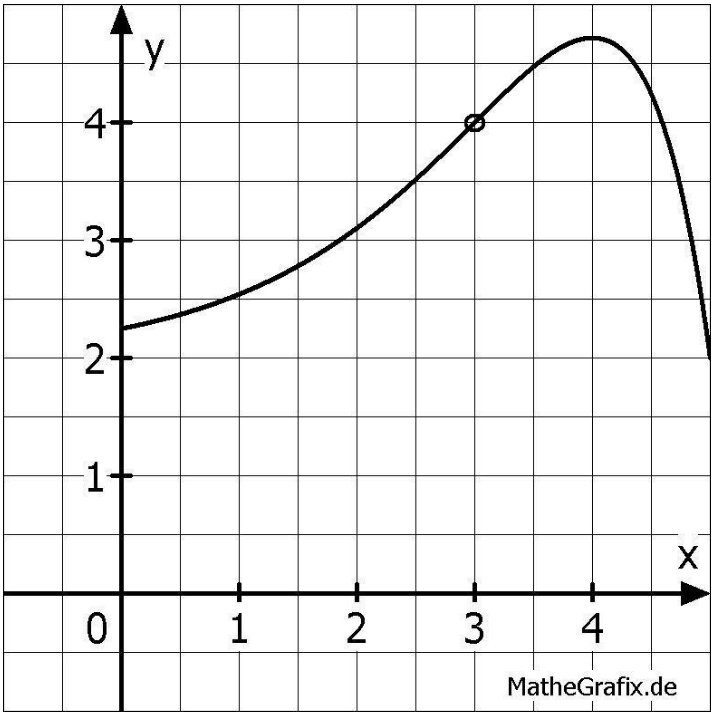
$$\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty, \ \lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$$



[6] Gegeben $f(x) = 2 + (5 - x) \cdot e^{x-3}$ mit $D(f) = [0, 5]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = (4 - x) \cdot e^{x-3}$, die lokale Maximalstelle $x = 4$ mit dem Wert $f(4) = 2 + e \approx 4.71$.

(a) Untersuchen Sie auf Basis dieser Informationen das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkt) und skizzieren Sie f.

[Bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen; folgende Hilfswerte sind bereits eingetragen: $f(0) \approx 2.25$, $f(1) \approx 2.55$, $f(3.5) \approx 4.47$, $f(4) \approx 4.71$, $f(4.5) \approx 4.24$, $f(5) = 2$]



Ergebniskontrolle
$f''(x) = (3 - x) \cdot e^{x-3}$.
Also $f''(x) \geq 0$ für $x \in [0, 3]$, d.h. f kovex über $[0, 3]$,
und $f''(x) \leq 0$ für $x \in [3, 5]$, d.h. f konkav über $[3, 5]$.
Wendepunkt an der Stelle $x = 3$ mit dem Wert $f(3) = 4$.

(b) Bestimmen Sie die Elastizitätsfunktion $\mathcal{E}^f(x)$ der obigen Funktion f und damit an der Basisstelle $x_0 = 3$ die (ungefähre) relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ gegenüber $f(3)$ bei einer relativen Erhöhung von x gegenüber $x_0 = 3$ um 4%.

Ergebniskontrolle
$\mathcal{E}^f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{(4-x)\cdot e^{x-3}}{2+(5-x)\cdot e^{x-3}}$. Für $x_0 = 3$ ist $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}^f(3) \cdot 4\%$.
Mit $f(3) = 4$ [siehe auch (a)] und $f'(3) = 1$ ist $\mathcal{E}^f(3) = \frac{3}{4}$, also $\frac{df}{f} \approx \frac{3}{4} \cdot 4\% = 3\%$

[2] (a) Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^7}{e^x}$ mit der L'Hopital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

[5] (b) Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie den Wert der Zahl α rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle" $x_0 = 0$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{für} \quad -1 \leq x < 0 \\ \alpha & \text{für} \quad x = 0 \\ \frac{e^x}{x+1} & \text{für} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^7}{e^x} \overset{\text{LHR}\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{7x^6}{e^x} \overset{\text{LHR}\frac{\infty}{\infty}}{=} \cdots \overset{\text{LHR}\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{7!}{e^x} = 0 \quad (7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)$$

(b)

LGW in $x_0 = 0$: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)}{1} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1} = 1$
RGW in $x_0 = 0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x+1} = 1$

f ist stetig in $x_0 = 0 \Leftrightarrow$ LGW = RGW = FW in x_0, d.h. $1 =$ LGW = RGW = FW $= \alpha$.

Also f ist stetig in x_0 mit $\alpha = 1$.

[4] Folgende Bestimmungsgleichung ist für x zu lösen:

$$x^3 + x^2 \stackrel{!}{=} 1.5$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von x mit Hilfe des Newton-Verfahrens, d.h. gefragt sind: Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert $x_0 = 1$, eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (einsetzen, nicht ausrechnen).

Ergebniskontrolle

$f(x) = x^3 + x^2 - 1.5 \stackrel{!}{=} 0$; $f'(x) = 3x^2 + 2x$

$x_{n+1} = x_n - (f(x_n)/f'(x_n))$; Startwert $x_0 = 1$;

- Erste Iteration: $x_1 = x_0 - (f(x_0)/f'(x_0)) = 1 - (f(1)/f'(1)) = 1 - (0.5/5) = 0.9$
- Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.9 - \frac{f(0.9)}{f'(0.9)} = [0.9 - \frac{(0.9)^3+(0.9)^2-1.5}{3\cdot(0.9)^2+1.8} \approx 0.89078]$

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_1^9 f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 3 & \text{für } 1 \leq t < 4 \\ e^{t^2} & \text{für } t = 4 \\ 3 \cdot t^{-1/2} & \text{für } 4 < t \leq 9 \end{cases}$

<u>Ergebniskontrolle</u>

$\int_1^9 f(t)dt = \int_1^4 3\ dt + \int_4^9 3 \cdot t^{-1/2}dt = [3t]_1^4 + [6 \cdot t^{1/2}]_4^9 = 12 - 3 + 18 - 12 = 15$

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x (2t) \cdot \ln(t)\ dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = 0$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle

Mit $f(t) = t^2$, $g(t) = \ln(t)$ ist $f'(t) = 2t$ und $g'(t) = \frac{1}{t}$.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int\limits_1^x (2t) \cdot \ln(t) dt = [t^2 \cdot \ln(t)]_1^x - \int\limits_1^x t^2 \cdot \frac{1}{t} dt = [t^2 \cdot \ln(t)]_1^x - [\frac{1}{2}t^2]_1^x = [x^2 \cdot \ln(x) - 0] - [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}] \\
&= x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{2} = x^2 \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

[4] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = (1+x)^{-7}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und damit eine Näherung für den Wert $f(0.01) = (1.01)^{-7}$

Ergebniskontrolle

$f(0) = 1$; $f'(x) = -7 \cdot (1+x)^{-8}$; $f'(0) = -7$; $f''(x) = 56 \cdot (1+x)^{-9}$; $f''(0) = 56$;

$T_2^f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 = 1 + (-7) \cdot (x - 0)^1 + \frac{56}{2} \cdot (x - 0)^2$ mit $[x_0 = 0]$.

Damit ist $f(0.01) \approx T_2^f(0.01, 0) = 1 - 0.07 + 0.0028 = 0.9328$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = (x \cdot y) \cdot e^{1-y}$ (x > 0, y > 0)
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

<u>Ergebniskontrolle</u>

$f'_x(x,y) = y \cdot e^{1-y}$

$f''_{xx}(x,y) = 0$

$f'_y(x,y) = x \cdot e^{1-y} + (x \cdot y) \cdot (-1) \cdot e^{1-y} = (x - x \cdot y) \cdot e^{1-y}$

$f''_{yy}(x,y) = -x \cdot e^{1-y} + (-x) \cdot e^{1-y} + (x \cdot y) \cdot e^{1-y} = (xy - 2x) \cdot e^{1-y}$

$f''_{xy}(x,y) = f'_{yx}(x,y) = (1-y) \cdot e^{1-y}$

[5] Gegeben sind die Funktion $f(x, y) = (x^2 \cdot y) + e^{y-2x}$
und die Basistelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die x-Variable um $+10\%$ und die y-Variable um $+4\%$ verändert.

Ergebniskontrolle

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$
mit $f'_x(x, y) = y \cdot 2 \cdot x - 2e^{y-2x}$ und $f'_y(x, y) = x^2 + e^{y-2x}$.
An der Basisstelle (1,2) ist $f(1, 2) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $f'_x(1, 2) = 4 - 2 = 2$, $f'_y(1, 2) = 1 + 1 = 2$.
Also $\mathcal{E}_x^f(1, 2) = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ und $\mathcal{E}_y^f(1, 2) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{100} + \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{100} = \frac{20}{300} + \frac{16}{300} = \frac{36}{300} = \frac{12 \cdot 3}{100 \cdot 3} = \frac{12}{100} = 12\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(1, 2) = 3$ zu $f(1.10, 2.08)$ ist ca. 12%.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 2 \cdot (\frac{1}{3} \cdot x^3 - x + x \cdot y + y + 1) - y^2 \qquad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattel<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle

$f'_x(x,y) = 2 \cdot (x^2 - 1 + y) = 2x^2 - 2 + 2y$
$f'_y(x,y) = 2 \cdot (x+1) - 2y = 2x + 2 - 2y$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'_x & = & 0 \\ f'_y & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x^2 - 2 + 2y & = & 0 \\ 2x + 2 - 2y & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2 \cdot (x^2 - 1 + y) & = & 0 \\ 2 \cdot (x + 1 - y) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - 1 + (x+1) & = & 0 \\ x+1 & = & y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x \cdot (x+1) & = & 0 \\ x+1 & = & y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} x = 0 & \text{oder} \quad x = -1 \\ x+1 = y & \end{array} \right\}$$

Also sind die stationären Punkte: $P1 = (0,1)$ und $P2 = (-1,0)$.

$f''_{xx}(x,y) = 4x, \quad f''_{yy}(x,y) = -2, \quad f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 2$

[Hier die Variante, erst $H_D = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$ an der Stelle (x_0, y_0) allgemein auszurechnen und dann die stationären Punkte einzusetzen:]

$$H_D(x_0,y_0) = (f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2)(x_0,y_0) = -8x_0 - 4$$

H_D-Werte an den stationären Stellen:

$$H_D(0,1) = -4 \;\text{ und }\; H_D(-1,0) = 4$$

Insgesamt ist also:

- $H_D(0,1) < 0$, also $(0,1)$ Sattelstelle;
  zugehöriger Funktionswert $f(0,1) = 3$.
- $H_D(-1,0) > 0$ und $f''_{xx}(-1,0) = -4 < 0$, also $(-1,0)$ eine lokale Maximalstelle;
  zugehöriger Funktionswert $f(-1,0) = \frac{10}{3}$.