Mathematik für Ökonomen – SS 2012 – Campus Duisburg

PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 1

24.07.2012, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Matrikelnummer	
Name	
Vorname	
Geburtsdatum	
	Ich habe obige Punkte gelesen.
	Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:
Unterschrift	

Abschnitt für Korrektur!

[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $x \geq 1$

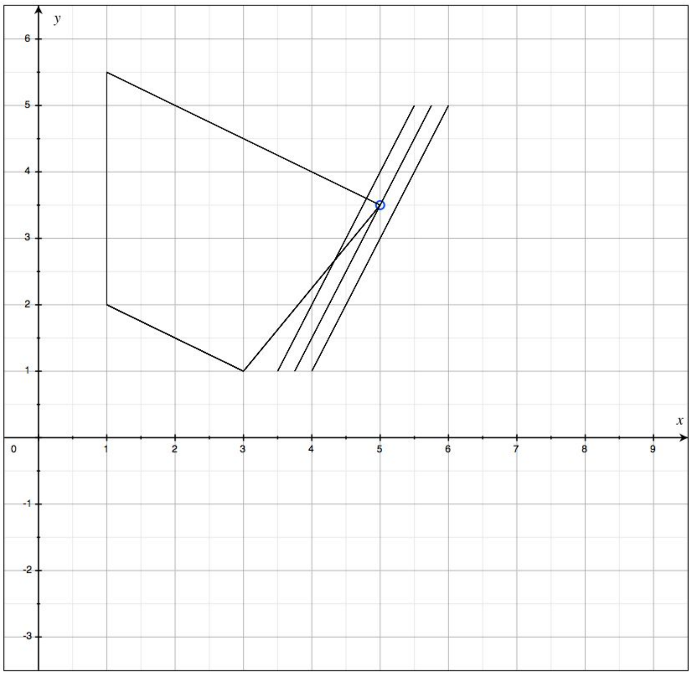
(2) $2y + x \geq 5$

(3) $2y + x \leq 12$

(4) $y - \frac{5}{4}x \geq -\frac{11}{4}$

Ergebniskontrolle:

$$\mathbb{L} = \left\{ (x,y) : x \geq 1 \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \text{ und } y \leq 6 - \frac{1}{2}x \text{ und } y \geq \frac{5}{4} \cdot x - \frac{11}{4} \right\}$$



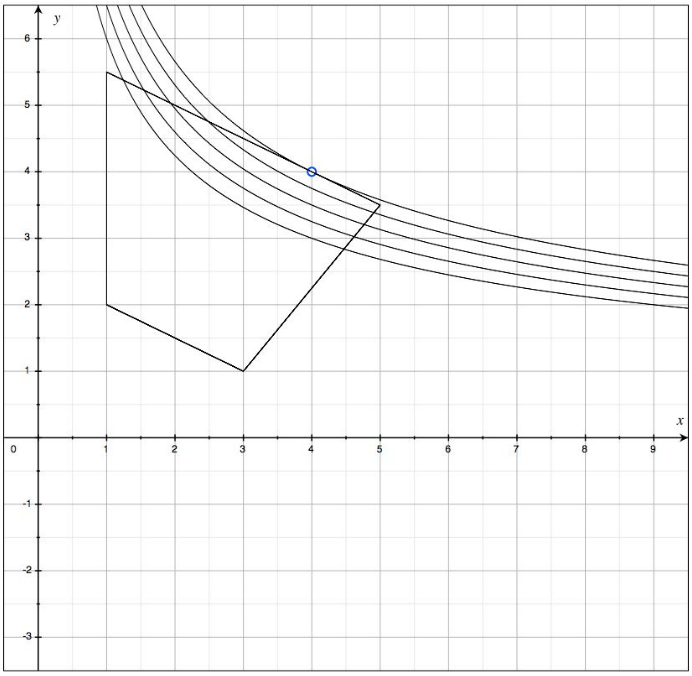
[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = 2x - y$
„halbgraphisch" : Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Ergebniskontrolle:

Zielgeradenschar: $y = -z + 2x$, z variabel.
Da $b < 0$ in $z = ax + by$, bedeutet Maximierung von z eine Verschiebung nach unten. Die Maximalstelle (x_0, y_0) ergibt sich als Schnittpunkt der Beschränkungsgeraden (3) $y = 6 - \frac{1}{2}x$ und (4) $y = \frac{5}{4} \cdot x - \frac{11}{4}$. Damit ergibt sich x_0 durch Auflösungen der Gleichung $6 - \frac{1}{2}x = \frac{5}{4} \cdot x - \frac{11}{4}$. Also $x_0 = 5$. Einsetzen in (3) oder (4) liefert $y_0 = \frac{7}{2}$. Die Maximalstelle $(x_0 = 5, y_0 = \frac{7}{2})$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt den Maximalwert $z_0 = \frac{13}{2}$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x^{\frac{1}{2}}y$ „halbgraphisch" : Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalem z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) korrekt in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Ergebniskontrolle:

Optisch ergibt sich (3) als relevante Beschränkungsgerade. Berührung im "Innern" des Geradenstücks, also Tangentiallösung.
Zur Berechnung der Tangentiallösung:

a) Einsetzen von (3) $y = 6 - \frac{1}{2}x$ in die Zielfunktion: $z = f(x) = x^{1/2} \cdot (6 - \frac{1}{2}x) = 6x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2}$.

b) $f'(x) = 3x^{-1/2} - \frac{3}{4}x^{1/2}$

c) $f'(x)$ gleich 0 setzen und x auflösen, liefert $x_0 = 4$. Einsetzen in die Beschränkungsgerade ergibt $y_0 = 4$.

d) Maximalwert: $z_0 = x_0^{1/2} \cdot y_0 = (4)^{1/2} \cdot 4 = 8$.

[6] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot n^2 \ + \ 6+ \ 5\cdot n^3}{10\cdot n^3 \ - \ 17\cdot n \ + 37} = ?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=3}^{n} \dfrac{2^{k-1}}{3^k} = ?$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{2i} =?$

Untere Summengrenze beachtet?

Ergebniskontrolle:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot n^2 \ + \ 6+ \ 5\cdot n^3}{10\cdot n^3 \ - \ 17\cdot n \ + 37} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2/n \ + \ 6/n^3 \ + \ 5}{10 \ - \ 17/n^2 \ + \ 37/n^3} = \dfrac{1}{2}.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=3}^{n} \dfrac{2^{k-1}}{3^k} = \sum\limits_{k=3}^{\infty} \dfrac{2^{k-1}}{3^k} = \frac{4}{27}\frac{1}{1-2/3} = \frac{4}{9}.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{2i} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{9}{16}\right)^{i} = \frac{1}{1-9/16} = \frac{16}{7}.$

[4] Eine endliche Folge von wöchentlichen Zahlungen $a_i, i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag $|d|$ abnehmen, soll sich in n Wochen zu einem Wert s_n aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $n = 10$ und $|d| = 3$ (also $d = -3$) werden festgelegt. Welchen Wert muss die erste Zahlung a_1 haben, damit das Summenziel $s_n = 225$ mit der letzten Zahlung a_{10} genau erreicht wird? Wie hoch ist dann die letzte Zahlung a_{10}?

Ergebniskontrolle:

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe].

(b) $225 = 10 \cdot a_1 - \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 3 \Rightarrow 22.5 = a_1 - 13.5 \Rightarrow 36 = a_1$.

$a_{10} = 36 - 9 \cdot 3 = 9$.

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis). Hierbei sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 8 \\ 9 & -3 & -24 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(a) $(A+B)\cdot B^T$

(b) C^{-1}

Ergebniskontrolle:

(a) $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $(A+B)\cdot B^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 20 \\ 2 & 19 & 20 \\ 5 & 22 & 26 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

(b) Die dritte Zeile von C ist das $(-3)-$fache von der zweiten Zeile, also C nicht invertierbar, d.h. C^{-1} nicht definiert!

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

	Endprodukte		
Zwischenprodukte	E_1	E_2	E_3
Z_1	0	2	1
Z_2	2	2	2
Z_3	2	0	1

	Zwischenprodukte		
Rohstoffe	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	1	2
R_2	2	1	1

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 2)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 42 \\ 38 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (2, 2) \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ 38 \end{pmatrix} = 160$

[4] Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins), ein Anfangswert $K_0 > 0$ und ein Zielwert K_x, der um 80% über dem Anfangswert liegen soll.

(a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$ (d.h. $K_x = K_3$). Erforderliche Rendite $i = p\% =?$

(b) Gegeben: $i = 10\%$. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n <u>erstmals</u> die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

Hilfswerte: $1.8^{\frac{1}{3}} \approx 1.22$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.8 \approx 0.59$, $\ln 2.25 \approx 0.81$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

$K_x - K_0 = 0.8 \cdot K_0$, also $K_x = 1.8 \cdot K_0$

(a) $1.8 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^3 \Leftrightarrow 1 + i \approx (1.8)^{\frac{1}{3}} \approx 1.22 \Leftrightarrow i = 0.22 = 22\%$

(b) $K_x = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.8)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.59}{0.1} = \frac{59}{10}$; $n = \lceil x \rceil = 6$

[5] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge von:

$$\frac{1}{20} \geq \left(4 + 2 \cdot |x|^3\right)^{-1}$$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{20} \geq \left(4 + 2 \cdot |x|^3\right)^{-1} \\
\Leftrightarrow \quad & 4 + 2 \cdot |x|^3 \geq 20 \\
\Leftrightarrow \quad & |x|^3 \geq 8 \\
\Leftrightarrow \quad & |x| \geq 2
\end{aligned}$$

Also Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq -2 \text{ oder } x \geq 2\} =]-\infty, -2] \cup [2, \infty[.$$

[4] Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Probe gemacht?

Ergebniskontrolle:

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
2	2	2	1	0	0	I
2	-2	6	0	1	0	II
2	2	-2	0	0	1	III
2	2	2	1	0	0	I
0	-4	4	-1	1	0	II - I
0	0	-4	-1	0	1	III - I
2	0	4	1/2	1/2	0	I + 1/2 II
0	-4	4	- 1	1	0	II
0	0	-4	-1	0	1	III
2	0	0	-1/2	1/2	1	I + III
0	-4	0	-2	1	1	II + III
0	0	-4	-1	0	1	III
1	0	0	-1/4	1/4	1/2	1/2 I
0	1	0	1/2	-1/4	-1/4	-1/4 II
0	0	1	1/4	0	-1/4	-1/4 III

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 1/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[7] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$Y \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus die allgemeine Lösung für Y.

Ergebniskontrolle:

(a) Beim LGS $Ax = b$ ist eine Variable frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad : \quad \begin{array}{lcrcl} x_1 & = & 11/3 & - & 1/3 \cdot x_3 \\ x_2 & = & -2/3 & - & 2/3 \cdot x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & \end{array} \right\}$$

(b) $Y \cdot A = B \Leftrightarrow A^T \cdot Y^T = B^T$. Die Lösung von $A^T \cdot X = B^T$ (GJ-Algorithmus) ergibt durch transponieren ($Y = X^T$) die Lösung von $Y \cdot A = B$. [Siehe Thema 5.2 / Bsp. 7-8]

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2	Protokoll
2	3	1	1	1	I
-4	2	-2	-2	2	II
1	3/2	1/2	1/2	1/2	1/2 I
-4	2	-2	-2	2	II
1	3/2	1/2	1/2	1/2	I
0	8	0	0	4	II + 4 I
1	3/2	1/2	1/2	1/2	I
0	1	0	0	1/2	1/8 II
1	0	1/2	1/2	-1/4	I - 3/2 II
0	1	0	0	1/2	II

Lösung X von $A^T \cdot X = B^T$ spaltenweise, d.h. Lösung $Y = X^T$ von $Y \cdot A = B$ zeilenweise.

$$\mathbb{L}_1 = \{(1/2 - x_3/2, 0, x_3)^T \ : \ x_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{L}_2 = \{(-1/4 - x_3/2, 1/2, x_3)^T \ : \ x_3 \in \mathbb{R}\},$$

wobei die x_3 in $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ unabhängig voneinander frei wählbar sind, d.h.

$$Y = \begin{pmatrix} (1/2 - a/2) & 0 & a \\ (-1/4 - b/2) & 1/2 & b \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$