Mathematik für Ökonomen – SS 12 – Campus Duisburg

PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 2

24.07.2012, 11:00-13:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Matrikelnummer ____________________

Name ____________________

Vorname ____________________

Geburtsdatum ____________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____________________

Abschnitt für Korrektur:

[5] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α, β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 1$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta \cdot e^{4(x-1)} + x - 1}{x+1} & \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad x = 1 \\ \frac{5 \cdot \ln x + \beta}{x + \alpha} & \text{für} \quad 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 = 1$: $\lim\limits_{x \to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_-} \frac{\beta \cdot e^{4(x-1)} + x - 1}{x+1} = \frac{\beta}{2} \overset{!}{=} f(1) = 1 \Leftrightarrow \beta = 2$

RGW in $x_0 = 1$: $\lim\limits_{x \to 1_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_+} \frac{5 \cdot \ln x + \beta}{x + \alpha} = \frac{\beta}{1+\alpha} \overset{!}{=} f(1) = 1 \Leftrightarrow \beta = (1 + \alpha)$

Also $\alpha = 1, \beta = 2$.

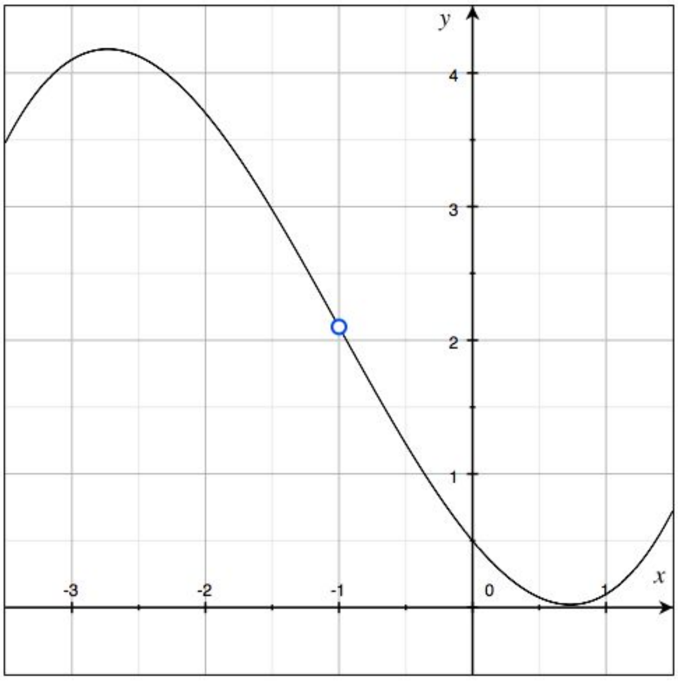
[6] Gegeben $f(x) = 0.2{\cdot}x^3{+}0.6{\cdot}x^2{-}1.2{\cdot}x{+}0.5$ mit $D(f) = [-3, 1]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben! f hat die Ableitung $f'(x) = 0.6 \cdot x^2 + 1.2 \cdot x - 1.2$, die lokale Maximalstelle $x = -1 - \sqrt{3} \approx -2.73$ mit dem Wert $f(-1-\sqrt{3}) \approx 4.2$ sowie die lokale Minimalstelle $x = -1 + \sqrt{3} \approx 0.73$ mit dem Wert $f(1 - \sqrt{3}) \approx 0$.

(a) Untersuchen Sie auf Basis dieser Informationen das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkt) und skizzieren Sie f.

[Bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen; folgende Hilfswerte sind bereits eingetragen: $f(-3) = 4.1$, $f(-2) = 3.7$, $f(-1) = 2.1$, $f(0) = 0.5$, $f(1) = 0.1$]

Ergebniskontrolle:

$f''(x) = 1.2 \cdot (x + 1)$.
Also $f''(x) \leq 0$ für $x \in [-3, -1]$, d.h. f konkav über $[-3, -1]$,
und $f''(x) \geq 0$ für $x \in [-1, 1]$, d.h. f konvex über $[-1, 1]$.
Wendepunkt an der Stelle $x = -1$ mit dem Wert $f(-1) = 2.1$.



(b) Bestimmen Sie die Elastizitätsfunktion $\mathcal{E}^f(x)$ der obigen Funktion f und damit an der Basisstelle $x_0 = -1$ die (ungefähre) relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ gegenüber $f(-1)$ bei einer relativen Erhöhung von x gegenüber $x_0 = -1$ um 7%.

Ergebniskontrolle:

$\mathcal{E}^f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{0.6 \cdot x^2 + 1.2 \cdot x - 1.2}{0.2 \cdot x^3 + 0.6 \cdot x^2 - 1.2 \cdot x + 0.5}$. Für $x_0 = -1$ ist $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}^f(-1) \cdot 7\%$.
Mit $f(-1) = 2.1$ [siehe auch (a)] und $f'(-1) = -1.8$ ist $\mathcal{E}^f(-1) = \frac{6}{7}$, also $\frac{df}{f} \approx \frac{6}{7} \cdot 7\% = 6\%$

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + 4\cdot(x+1)^{1/2} - 3\cdot x - 5}{x^3}$ mit der L'Hospital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + 4\cdot(x+1)^{1/2} - 3\cdot x - 5}{x^3} \overset{\text{LHR}\,\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 2\cdot(x+1)^{-1/2} - 3}{3\cdot x^2} \overset{\text{LHR}\,\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (x+1)^{-3/2}}{6x}$$

$$\overset{\text{LHR}\,\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + (3/2)\cdot(x+1)^{-5/2}}{6} = \frac{5}{12}$$

[4] Ein Student schließt einen Sparplan ab, aus dem sich für die Rendite x folgende Bestimmungsgleichung ergibt

$$x^4 + 4 \cdot x^3 - 6 \cdot x \stackrel{!}{=} 5$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von x mit Hilfe des Newton-Verfahrens, d.h. gefragt sind: Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert $x_0 = 1$, eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (einsetzen, nicht ausrechnen).

Ergebniskontrolle:

$f(x) = x^4 + 4 \cdot x^3 - 6 \cdot x - 5 \stackrel{!}{=} 0$; $f'(x) = 4 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 - 6$

$x_{n+1} = x_n - (f(x_n)/f'(x_n))$; Startwert $x_0 = 1$;

- Erste Iteration: $x_1 = x_0 - (f(x_0)/f'(x_0)) = 1 - (f(1)/f'(1)) = 1 - (-6/10) = 1.6$
- Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.6 - \frac{f(1.6)}{f'(1.6)} = [1.6 - \frac{(1.6)^4+4\cdot(1.6)^3-6\cdot 1.6-5}{4\cdot(1.6)^3+12\cdot(1.6)^2-6} \approx 1.39715843]$

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{e^2} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{für} \;\; 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{für} \;\; t = 1 \\ 1/t & \text{für} \;\; 1 < t \le e^2 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$\int_0^{e^2} f(t)dt = \int_0^1 t^{1/2}\ dt + \int_1^{e^2} t^{-1}dt = [\frac{2}{3} \cdot t^{3/2}]_0^1 + [\ln t]_1^{e^2} = \frac{2}{3} - 0 + \ln e^2 - \ln 1 = \frac{8}{3}$

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x (4 \cdot t) \cdot \ln t \, dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = 0$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:

Mit $f(t) = \ln t$, $g'(t) = 4 \cdot t$ ist $f'(t) = 1/t$ und $g(t) = 2 \cdot t^2$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\limits_1^x (4 \cdot t) \cdot \ln t dt = [2 \cdot t^2 \cdot \ln t]_1^x - \int\limits_1^x 2 \cdot t \, dt = 2 \cdot x^2 \cdot \ln x - \left[t^2\right]_1^x \\ &= 2 \cdot x^2 \cdot \ln x - x^2 + 1 \end{aligned}$$

[4] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = e^{-x^2/2}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und damit eine Näherung für den Wert $f(1) = e^{-0.5}$.

Ergebniskontrolle:

$f(0) = 1$; $f'(x) = -x \cdot e^{-x^2/2}$; $f'(0) = 0$; $f''(x) = -e^{-x^2/2} + x^2 \cdot e^{-x^2/2}$; $f''(0) = -1$;

$T_2^f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2$ mit $[x_0 = 0]$.

Damit ist $f(1) \approx T_2^f(1, 0) = 1 - 0.5 = 0.5$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = (3 \cdot x + y)^2 + e^{x-y}$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x, y) = 2 \cdot (3 \cdot x + y) \cdot 3 + e^{x-y} = 6 \cdot (3 \cdot x + y) + e^{x-y}$

$f''_{xx}(x, y) = 18 + e^{x-y}$

$f'_y(x, y) = 2 \cdot (3 \cdot x + y) - e^{x-y}$

$f''_{yy}(x, y) = 2 + e^{x-y}$

$f''_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y) = 6 - e^{x-y}$

[5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x,y) = 30 \cdot x^{2/3} \cdot y^{1/3}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 3$ und $y_0 = 3$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die x-Variable um $+6\%$ und die y-Variable um -3% verändert.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ mit

$$f'_x(x,y) = 20 \cdot x^{-1/3} \cdot y^{1/3} \text{ und } f'_y(x,y) = 10 \cdot x^{2/3} \cdot y^{-2/3}.$$

An der Basisstelle (3,3) ist $f(3,3) = 90$, $f'_x(3,3) = 20$, $f'_y(3,3) = 10$. Also

$$\mathcal{E}_x^f(3,3) = 3 \cdot \frac{20}{90} = \frac{2}{3} \text{ und } \mathcal{E}_y^f(,) = 3 \cdot \frac{10}{90} = \frac{1}{3}$$

.

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = \frac{2}{3} \cdot 6\% + \frac{1}{3} \cdot (-3\%) = 4\% - 1\% = 3\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(3,3) = 90$ zu $f(3.18, 2.91)$ ist ca. 3%.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = (x^2+3)\cdot y - 6\cdot x - 12\cdot \ln y + 1 \qquad (x\in\mathbb{R}, y>0)$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelpunktstellen und die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x,y) = 2\cdot x\cdot y - 6$
$f'_y(x,y) = x^2 + 3 - \frac{12}{y}$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f'_x(x,y) & = & 0 \\ f'_y(x,y) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2\cdot x\cdot y - 6 & = & 0 \\ x^2+3-12/y & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3/y \\ 3\cdot y^2 + 9 - 12\cdot x & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3/y \\ \left(y-2\right)^2 - 1 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3/y \\ \left(y-2\right)^2 & = & 1 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3/y \\ |y-2| & = & 1 \end{array}\right\}$$

Also sind die stationären Punkte: $P1 = (1,3)$, $P2 = (3,1)$.

Zur Berechnung der Werte von $H_D(x,y) = f''_{xx}(x,y)\cdot f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2$ für jeden stationären Punkt (x_0,y_0):

$f''_{xx}(x,y) = 2\cdot y$
$f''_{yy}(x,y) = 12/y^2$
$f''_{xy}(x,y) = 2\cdot x$

- $H_D(1,3) = 6\cdot 12/9 - 4 = 4 > 0$ und $f''_{xx}(1,3) = 6 > 0 \Rightarrow (1,3)$ ist eine Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(1,3) = 7 - 12\cdot\ln 3$.
- $H_D(3,1) = 2\cdot 12 - 6^2 = -12 < 0 \Rightarrow (3,1)$ ist ein Sattelpunktstelle von f mit Funktionswert $f(3,1) = -5$.