Mathematik für Ökonomen – SS 2013 – Campus Duisburg

Prof. Dr. U. Herkenrath/PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 1

23.07.2013, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

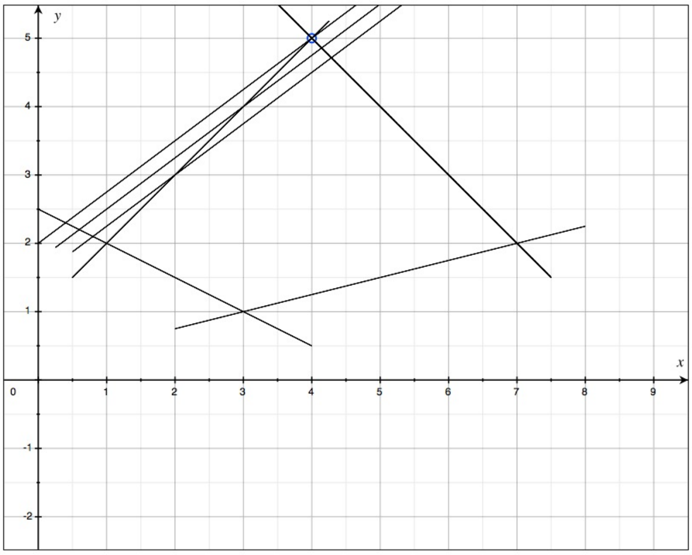
[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

(1) $y \ + x \leq \ 9$

(2) $4y \ - \mathrm{x} \geq \ 1$

(3) $y - x \leq \ 1$

(4) $2y \ + x \geq \ 5$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Ergebniskontrolle:

$$\mathbb{L} = \left\{ (x, y) : y \leq 9 - x \text{ und } y \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x \text{ und } y \leq 1 + x \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \ \cdot x \right\}$$

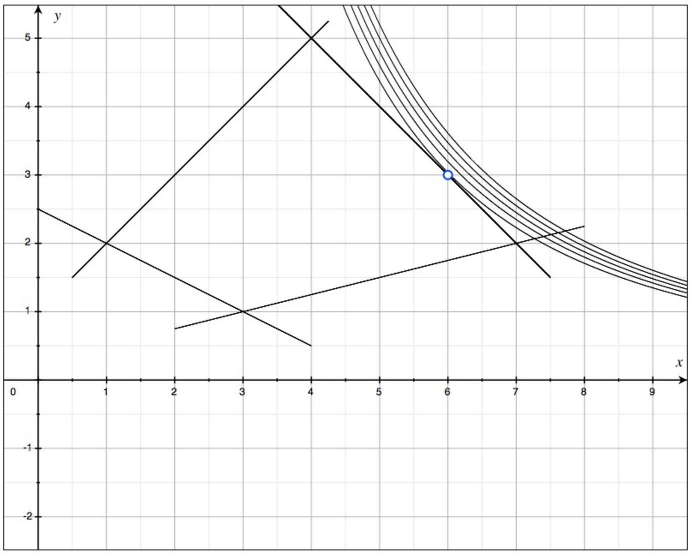
[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = -3x + 4y$ „halbgraphisch“ : Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) <u>und</u> Maximalwert z_0 <u>rechnerisch</u> bestimmen.

Ergebniskontrolle:

Zielgeradenschar: $y = \frac{1}{4} \cdot z + \frac{3}{4} \cdot x$, z variabel.
Da $b > 0$ in $z = ax + by$, bedeutet Maximierung von z eine Verschiebung nach oben. Die Maximalstelle (x_0, y_0) ergibt sich als Schnittpunkt der Beschränkungsgeraden (1) $y = 9 - x$ und (3) $y = 1 + x$. Damit ergibt sich x_0 durch Auflösungen der Gleichung $9 - x = 1 + x$. Also $x_0 = 4$. Einsetzen in (1) oder (3) liefert $y_0 = 5$. Die Maximalstelle $(x_0 = 4, y_0 = 5)$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt den Maximalwert $z_0 = 8$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x^2 y$ mit $x, y > 0$ „halbgraphisch“ : Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalem z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) korrekt in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Ergebniskontrolle:

Optisch ergibt sich (1) als relevante Beschränkungsgerade. Berührung im “Innern” des Geradenstücks, also Tangentiallösung.
Zur Berechnung der Tangentiallösung:

a) Einsetzen von (1) $y = 9 - x$ in die Zielfunktion: $z = f(x) = x^2 \cdot (9 - x) = 9 \cdot x^2 - x^3$.

b) $f'(x) = 18 \cdot x - 3 \cdot x^2$

c) $f'(x)$ gleich 0 setzen und nach x auflösen, liefert $x_0 = 6$ (beachte $x \neq 0$). Einsetzen in die Beschränkungsgerade ergibt $y_0 = 3$.

d) Maximalwert: $z_0 = x_0^2 \cdot y_0 = 36 \cdot 3 = 108$.

[6] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot n^2 \;+\; 3\cdot n^3}{2 \;+\; 39\cdot n \;+\; 21\cdot n^2 \;+\; 10\cdot n^3 \;-\; n^4} = ?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{2^{k-1}}{3^k} = ?$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{i}{2}} =?$

Untere Summengrenze beachtet?

Ergebniskontrolle:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot n^2 \;+\; 3\cdot n^3}{2+39\cdot n+21\cdot n^2+10\cdot n^3-n^4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2/n^2 \;+\; 3/n}{2/n^4+39/n^3+21/n^2+10/n-1} = 0.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{2^{k-1}}{3^k} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{2^{k-1}}{3^k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{2^{k+1}}{3^{k+2}} = \frac{2}{9}\cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{2^k}{3^k} = \frac{2}{9}\cdot \frac{1}{1-2/3} = \frac{2}{3}.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{i}{2}} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} = \frac{1}{1-2/3} = 3.$

[4] Eine endliche Folge von wöchentlichen Zahlungen $a_i, i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag $|d|$ abnehmen, soll sich in n Wochen zu einem Wert s_n aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $n = 10$ und $|d| = 4$ (also $d = -4$) werden festgelegt. Welchen Wert muss die erste Zahlung a_1 haben, damit das Summenziel $s_n = 190$ mit der letzten Zahlung a_{10} genau erreicht wird? Wie hoch ist dann die letzte Zahlung a_{10}?

Ergebniskontrolle:

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe].

(b) $190 = 10 \cdot a_1 - \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 4 \Rightarrow 370 = 10 \cdot a_1 \Rightarrow 37 = a_1$.

$a_{10} = 37 - 9 \cdot 4 = 1$.

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis). Hierbei sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & -3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(a) $B^T \cdot (A+B)$

(b) C^{-1}

Ergebniskontrolle:

(a) $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $B^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $B^T \cdot (A+B) = \begin{pmatrix} 28 & 6 & 8 \\ 14 & 17 & 8 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

(b) C enthält eine Nullzeile, also C^{-1} nicht definiert!

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	3	1	2
	R_2	1	2	1

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	1	2	2
	Z_2	1	2	2
	Z_3	1	0	1

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 2)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 46 \\ 32 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (2, 2) \cdot \begin{pmatrix} 46 \\ 32 \end{pmatrix} = 156$

[4] Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins), ein Anfangswert $K_0 > 0$ und ein Zielwert K_x, der um 25% über dem Anfangswert liegen soll.

(a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$ (d.h. $K_x = K_3$). Erforderliche Rendite $i = p\% =?$

(b) Gegeben: $i = 3\%$. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

Hilfswerte: $\ln 1.03 \approx 0.03$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $1.25^{\frac{1}{3}} \approx 1.08$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

$K_x - K_0 = 0.25 \cdot K_0$, also $K_x = 1.25 \cdot K_0$

(a) $1.25 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + i)^3 \Leftrightarrow 1 + i = (1.25)^{\frac{1}{3}} \approx 1.08 \Leftrightarrow i = 0.08 = 8\%$

(b) $K_x = K_0 \cdot (1.03)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.25)}{\ln(1.03)} \approx \frac{0.22}{0.03} = \frac{22}{3}$; $n = \lceil x \rceil = 8$

[5] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge von:

$$\frac{2+2\cdot e^{-7}}{3+3\cdot e^{1-|x|^3}} > \frac{2}{3}$$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
& \frac{2+2\cdot e^{-7}}{3+3\cdot e^{1-|x|^3}} > \frac{2}{3} \\
\Leftrightarrow\quad & 2+2\cdot e^{-7} > 2+2\cdot e^{1-|x|^3} \\
\Leftrightarrow\quad & 2\cdot e^{-7} > 2\cdot e^{1-|x|^3} \\
\Leftrightarrow\quad & e^{-7} > e^{1-|x|^3} \\
\Leftrightarrow\quad & -7 > 1-|x|^3 \\
\Leftrightarrow\quad & |x|^3 > 8 \\
\Leftrightarrow\quad & |x| > 2
\end{aligned}$$

Also Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ oder } x > 2\} = \,]-\infty, 2[\,\cup\,]2, \infty[.$$

[4] Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & -5 & -10 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
1	2	4	1	0	0	I
-3	-5	-10	0	1	0	II
2	-1	2	0	0	1	III
1	2	4	1	0	0	I
0	1	2	3	1	0	II + 3 I
0	-5	-6	-2	0	1	III - 2 I
1	0	0	- 5	-2	0	I - 2 II
0	1	2	3	1	0	II
0	0	4	13	5	1	III + 5 II
1	0	0	-5	- 2	0	I
0	1	0	-7/2	-3/2	-1/2	II - 1/2 III
0	0	4	13	5	1	III
1	0	0	-5	- 2	0	I
0	1	0	-7/2	-3/2	-1/2	II
0	0	1	13/4	5/4	1/4	1/4 III

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ -7/2 & -3/2 & -1/2 \\ 13/4 & 5/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 13 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[7] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus die allgemeine Lösung für Y.

(ii) Wie ändert sich die allgemeine Lösung Y, wenn in obiger Matrixgleichung in den Matrizen A und B jeweils alle Elemente halbiert werden. Begründen Sie bitte Ihre Aussage.

(iii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Matrix-Gleichung $X \cdot A^T = B^T$.

Ergebniskontrolle:

(a) Beim LGS $Ax = b$ sind 2 Variablen frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{array}{ccccc} x_1 & = & 1 & - \ x_3 & -2 \cdot x_4 \\ x_2 & = & 3 & + & x_4 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & \end{array} \right\}$$

(b) zu (i):

y_1	y_2	y_3	b_1	b_2	Protokoll
3	3	6	3	3	I
4	-1	2	-2	2	II
1	1	2	1	1	1/3 I
4	-1	2	-2	2	II
1	1	2	1	1	I
0	-5	-6	-6	- 2	II - 4 I
1	0	4/5	-1/5	3/5	I + 1/5 II
0	-5	-6	-6	-2	II
1	0	4/5	-1/5	3/5	I
0	1	6/5	6/5	2/5	-1/5 II

Lösung Y von $A \cdot Y = B$ spaltenweise.

$$\mathbb{L}_1 = \{(-1/5 - 4/5\ x_3, 6/5 - 6/5\ x_3, x_3)^T :\ x_3 \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{L}_2 = \{(3/5 - 4/5\ x_3, 2/5 - 6/5\ x_3, x_3)^T :\ x_3 \in \mathbb{R}\},$$

wobei die x_3 in $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ unabhängig voneinander frei wählbar sind, d.h.

$$Y = \begin{pmatrix} (-1/5 - 4/5\ a) & (3/5 - 4/5\ b) \\ (6/5 - 6/5\ a) & (2/5 - 6/5\ b) \\ a & b \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$

zu (ii):
es gilt
$$\left(\frac{1}{2} \cdot A \right) \cdot Y = \frac{1}{2} \cdot B \Leftrightarrow A \cdot Y = B,$$
also dieselbe allgemeine Lösung wie bei der Matrixgleichung $A \cdot Y = B$.

zu (iii):
es gilt
$$X \cdot A^T = B^T \Leftrightarrow A \cdot X^T = B.$$
Also erhält man $X = Y^T$ als Lösung von $X \cdot A^T = B^T$, wobei Y die Lösung von $A \cdot Y = B$ bezeichne.