Mathematik für Ökonomen – SS 2013 – Campus Duisburg

Prof. Dr. U. Herkenrath/PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 2

23.07.2013, 11:00-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer
Matrikelnummer
Name
Vorname
Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.
Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[4] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α, β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 3$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x \cdot (x+\alpha) & \text{für} \quad 0 \leq x < 3 \\ 3 \cdot \beta & \text{für} \quad x = 3 \\ \frac{x^3}{3} - x & \text{für} \quad 3 < x \leq 11 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 = 3$: $\lim\limits_{x \to 3_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3_-} \beta \cdot x \cdot (x+\alpha) = 3 \cdot \beta \cdot (3+\alpha) = 9 \cdot \beta + 3 \cdot \beta \cdot \alpha$

RGW in $x_0 = 3$: $\lim\limits_{x \to 3_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3_+} \left(\frac{x^3}{3} - 3\right) = 6 \overset{!}{=} f(3) = 3 \cdot \beta \Leftrightarrow \beta = 2$

Also

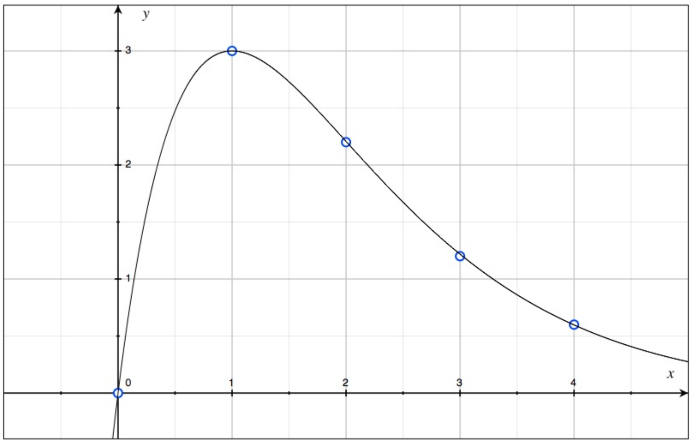
$$6 = f(3) = \lim_{x \to 3_-} f(x) = 9 \cdot \beta + 3 \cdot \beta \cdot \alpha = 18 + 6 \cdot \alpha.$$

D.h. $\alpha = -2, \beta = 2$.

[6] Gegeben $f(x) = 3 \cdot x \cdot e^{1-x}$ mit $D(f) = [0, 4]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = 3 \cdot e^{1-x} - 3 \cdot x \cdot e^{1-x}$. die lokale Maximalstelle $x = 1$ mit dem Wert $f(1) = 3$.

(a) Untersuchen Sie auf Basis dieser Informationen das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkt) und skizzieren Sie f.

[Bitte keine detaillierte Wertetabelle anlegen; folgende Hilfswerte sind bereits eingetragen: $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f(2) = 6 \cdot e^{-1}$, $f(3) = 9 \cdot e^{-2}$, $f(4) = 12 \cdot e^{-3}$]



Ergebniskontrolle:

$f''(x) = -3 \cdot e^{1-x} - 3 \cdot e^{1-x} + 3 \cdot xe^{1-x} = 3 \cdot e^{1-x}(x - 2)$.
Also $f''(x) \leq 0$ für $x \in [0, 2]$, d.h. f konkav über $[0, 2]$,
und $f''(x) \geq 0$ für $x \in [2, 4]$, d.h. f konvex über $[2, 4]$.
Außerdem $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, d.h. Wendepunkt an der Stelle $x = 2$ mit dem Wert $f(2) = 6 \cdot e^{-1}$.

(b) Bestimmen Sie die Elastizitätsfunktion $\mathcal{E}^f(x)$ der obigen Funktion f und damit an der Basisstelle $x_0 = 3$ die (ungefähre) relative Änderung des Funktionswertes $f(x)$ gegenüber $f(3)$ bei einer relativen Verminderung von x gegenüber $x_0 = 3$ um 3%.

Ergebniskontrolle:

$\mathcal{E}^f(x) = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} = x \cdot \frac{3 \cdot e^{1-x} - 3 \cdot x \cdot e^{1-x}}{3 \cdot x \cdot e^{1-x}} = 1 - x$.
Für $x_0 = 3$ ist $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}^f(3) \cdot (-3\%) = (-2) \cdot (-3\%) = 6\%$.
D.h. eine relative Verminderung von $x_0 = 3$ um -3% führt zu einer relativen Erhöhung von $f(3)$ um ungefähr 6%.

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^3}{6 \cdot e^{x-1} + 6 \cdot e^{1-x} - x^4 + 4 \cdot x - 15}$ mit der L'Hospital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^3}{6 \cdot e^{x-1} + 6 \cdot e^{1-x} - x^4 + 4 \cdot x - 15} &\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{3 \cdot (x-1)^2}{6 \cdot e^{x-1} - 6 \cdot e^{1-x} - 4 \cdot x^3 + 4} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{6 \cdot (x-1)}{6 \cdot e^{x-1} + 6 \cdot e^{1-x} - 12 \cdot x^2} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{6}{6 \cdot e^{x-1} - 6 \cdot e^{1-x} - 24 \cdot x} = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

[4] Zur Berechnung der Rendite $i_{eff} = x - 1$ einer Anlageform ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$2 \cdot x^4 + 2 \cdot x \stackrel{!}{=} 5$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von x mit Hilfe des Newton-Verfahrens, d.h. gefragt sind: Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert $x_0 = 1$, eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (einsetzen, nicht ausrechnen).

Ergebniskontrolle:

$f(x) = 2 \cdot x^4 + 2 \cdot x - 5 \stackrel{!}{=} 0$; $f'(x) = 8 \cdot x^3 + 2$

$x_{n+1} = x_n - (f(x_n)/f'(x_n))$; Startwert $x_0 = 1$;

- Erste Iteration: $x_1 = x_0 - (f(x_0)/f'(x_0)) = 1 - (f(1)/f'(1)) = 1 - (-1/10) = 1.1$
- Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.1 - \frac{f(1.1)}{f'(1.1)} = [1.1 - \frac{2 \cdot 1.1^4 + 2 \cdot 1.1 - 5}{8 \cdot 1.1^3 + 2} \approx 1.0899]$

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_1^4 f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} -1/t^2 & \text{für } 1 \leq t < e^1 \\ 1 & \text{für } e^1 \leq t < 3 \\ e^{t-3} & \text{für } 3 \leq t < 4 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned} \int_1^4 f(t)dt &= \int_1^{e^1} -1/t^2\ dt + \int_{e^1}^3 1\ dt + \int_3^4 e^{t-3}dt = [1/t]_1^{e^1} + [t]_{e^1}^3 + [e^{t-3}]_3^4 \\ &= \left(e^{-1} - 1\right) + \left(3 - e^1\right) + \left(e^1 - 1\right) = e^{-1} + 1 \end{aligned}$$

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x t^{-2} \cdot \ln t \; dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = 0$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:
Mit $f(t) = \ln t$, $g'(t) = t^{-2}$ ist $f'(t) = t^{-1}$ und $g(t) = -t^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int\limits_1^x t^{-2} \cdot \ln t \; dt = \left[-t^{-1} \cdot \ln t\right]_1^x - \int\limits_1^x -t^{-2} \; dt = -x^{-1} \cdot \ln x - \left[t^{-1}\right]_1^x \\
&= -x^{-1} \cdot \ln x - x^{-1} + 1
\end{aligned}
$$

[5] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = e^{\frac{(x-1)^2}{2}}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ und damit eine Näherung für den Funktionswert $f(2) = e^{\frac{1}{2}}$.

Ergebniskontrolle:

$f(1) = 1$; $f'(x) = e^{\frac{(x-1)^2}{2}} \cdot (x-1)$; $f'(1) = 0$; $f''(x) = e^{\frac{(x-1)^2}{2}} \cdot (x-1)^2 + e^{\frac{(x-1)^2}{2}}$; $f''(1) = 1$;

$T_2^f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2$ mit $[x_0 = 1]$.

Damit ist $f(2) \approx T_2^f(2, 1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = x \cdot e^{x \cdot y}$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x,y) = e^{x \cdot y} + x \cdot y \cdot e^{x \cdot y} = (1 + x \cdot y) \cdot e^{x \cdot y}$

$f''_{xx}(x,y) = y \cdot e^{x \cdot y} + (1 + x \cdot y) \cdot y \cdot e^{x \cdot y} = (2 \cdot y + x \cdot y^2) \cdot e^{x \cdot y}$

$f'_y(x,y) = x^2 \cdot e^{x \cdot y}$

$f''_{yy}(x,y) = x^3 \cdot e^{x \cdot y}$

$f''_{xy}(x,y) = f'_{yx}(x,y) = 2 \cdot x \cdot e^{x \cdot y} + x^2 \cdot y \cdot e^{x \cdot y} = (2 \cdot x + x^2 \cdot y) \cdot e^{x \cdot y}$

[5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x, y) = 2 \cdot x^{1/2} + 4 \cdot y^{1/2}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 100$ und $y_0 = 400$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die x-Variable um 50% und die y-Variable um -30% verändert.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f_x'(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f_y'(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ mit

$$f_x'(x, y) = x^{-1/2} \text{ und } f_y'(x, y) = 2 \cdot y^{-1/2}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (100, 400)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 100 \cdot \frac{100^{-1/2}}{2 \cdot 100^{1/2} + 4 \cdot 400^{1/2}} = \frac{10}{2 \cdot 10 + 4 \cdot 20} = \frac{1}{10},$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 400 \cdot \frac{2 \cdot 400^{-1/2}}{2 \cdot 100^{1/2} + 4 \cdot 400^{1/2}} = \frac{40}{2 \cdot 10 + 4 \cdot 20} = \frac{2}{5}.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = \frac{1}{10} \cdot 50\% + \frac{2}{5} \cdot (-30\%) = -7\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(100, 400)$ zu $f(150, 280)$ beträgt ca. -7%.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + 2 \cdot x \cdot y^2 + 2 \cdot y^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x,y) = 2 \cdot x + 2 \cdot y^2$
$f'_y(x,y) = 4 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'_x(x,y) & = & 0 \\ f'_y(x,y) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2 \cdot x + 2 \cdot y^2 & = & 0 \\ 4 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y^2 \\ x \cdot y + y & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y^2 \\ -y^3 + y & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y^2 \\ y \cdot (1 - y^2) & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y^2 \\ y & = & 0 \quad \text{oder} \quad y = -1 \quad \text{oder} \quad y = 1 \end{array} \right\}$$

Also sind die stationären Punkte: $P1 = (0,0), P2 = (-1,-1), P3 = (-1,1)$.

Zur Berechnung der Werte von $H_D(x,y) = f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0):

$f''_{xx}(x,y) = 2$
$f''_{yy}(x,y) = 4 \cdot x + 4$
$f''_{xy}(x,y) = 4 \cdot y$

- $H_D(0,0) = 2 \cdot 4 - 0 = 8 > 0$ und $f''_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow (0,0)$ ist eine Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(0,0) = 0$.
- $H_D(-1,-1) = 0 - 16 = -16 < 0 \Rightarrow (-1,-1)$ ist eine Sattelpunktstelle von f mit Funktionswert $f(-1,-1) = 1$.
- $H_D(-1,1) = 0 - 16 < 0 \Rightarrow (-1,1)$ ist eine Sattelpunktstelle mit Funktionswert $f(-1,1) = 1$.