Mathematik für Ökonomen – SS 2014 – Campus Duisburg

PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 1

22.07.2014, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[3] **(a)** Skizzieren Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems:

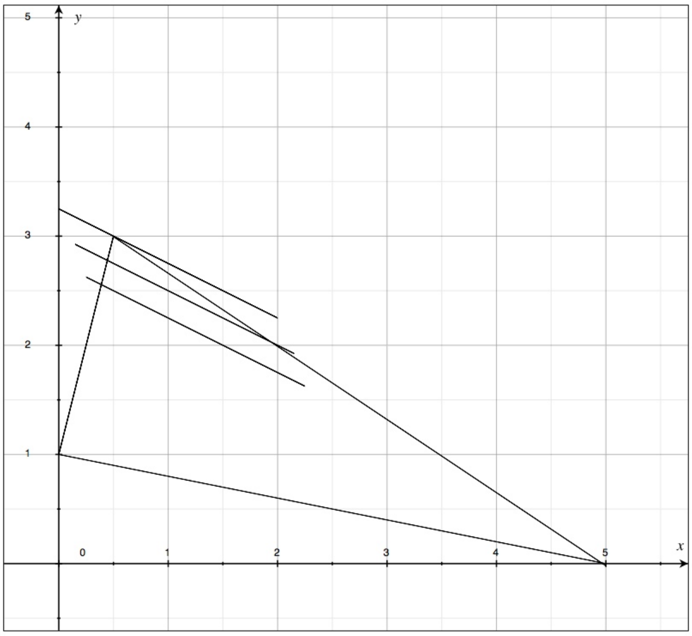
(1) $3 \cdot y \; + \; 2 \cdot x \; \leq \; 10$

(2) $2 \cdot y \; - \; 8 \cdot x \leq \; 2$

(3) $5 \cdot y \; + x \geq \; 5$

Ergebniskontrolle:

$$\mathbb{L} = \left\{ (x, y) : y \leq \frac{10}{3} - \frac{2}{3} \cdot x \text{ und } y \leq 1 + 4 \cdot x \text{ und } y \geq 1 - \frac{1}{5} \cdot x \right\}$$

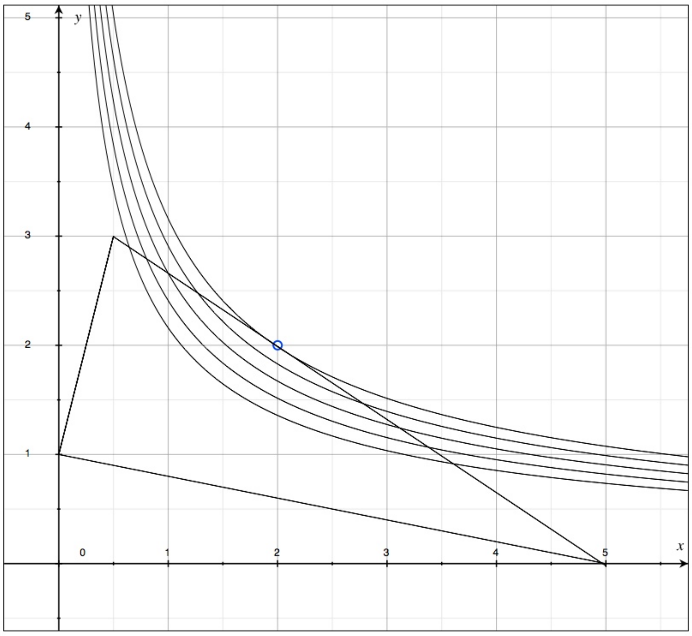


[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = \frac{1}{2} \cdot x + y$
„halbgraphisch“ : Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Ergebniskontrolle:
Zielgeradenschar: $y = z - \frac{1}{2} \cdot x$.
Da $b = 1 > 0$ in $z = a \cdot x + b \cdot y$, bedeutet Maximierung von z eine Verschiebung nach oben. Die Maximalstelle (x_0, y_0) ergibt sich als Schnittpunkt der Beschränkungsgeraden (1) $y = \frac{10}{3} - \frac{2}{3} \cdot x$ und (2) $y = 1 + 4 \cdot x$. Gleichsetzen von (1) und (2) liefert $\frac{10}{3} - \frac{2}{3} \cdot x = 1 + 4 \cdot x$ und damit $x_0 = \frac{1}{2}$. Eingesetzt in (1) oder (2) erhält man $y_0 = 3$. Die Maximalstelle $(x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = 3)$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt den Maximalwert $z_0 = \frac{13}{4} = 3.25$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x^{\frac{2}{3}} y$ „halbgraphisch“ : Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalem z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) <u>und</u> Maximalwert z_0 <u>rechnerisch</u> bestimmen.

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) korrekt in das folgende Diagramm.



Ergebniskontrolle:
Optisch ergibt sich (1) als relevante Beschränkungsgerade. Berührung im "Innern" des Geradenstücks, also Tangentiallösung.
Zur Berechnung der Tangentiallösung:

a) Einsetzen von (1) $y = \frac{10}{3} - \frac{2}{3} \cdot x$ in die Zielfunktion: $z = f(x) = x^{\frac{2}{3}} \cdot (\frac{10}{3} - \frac{2}{3} \cdot x) = \frac{10}{3} \cdot x^{2/3} - \frac{2}{3} \cdot x^{5/3}$.

b) $f'(x) = \frac{20}{9} \cdot x^{-1/3} - \frac{10}{9} \cdot x^{2/3}$

c) $f'(x)$ gleich 0 setzen und x auflösen, liefert $x_0 = 2$. Einsetzen in die Beschränkungsgerade ergibt $y_0 = 2$.

d) Maximalwert: $z_0 = x_0^{2/3} \cdot y_0 = 2^{5/3}$.

[6] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\cdot n^3 \;+\; 4\cdot n^2 \;-\; 4}{8\cdot n^5 \;+\; 2\cdot n^3 \;+\; 4\cdot n} = ?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^{k+3}}{5^{k+1}} = ?$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{i}{3}} =?$

Untere Summengrenze beachtet?

Ergebniskontrolle:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+4n^2-4}{n^5-2n^3+4n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5(2n^{-2}+4n^{-3}-4n^{-5})}{n^5(8+2n^{-2}+4n^{-4})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^{-2}+4n^{-3}-4n^{-5}}{8-2n^{-2}+4n^{-4}} = 0.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^{k+3}}{5^{k+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{2^{k+4}}{5^{k+2}} = \frac{2^4}{5^2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{2^k}{5^k} = \frac{16}{25}\frac{1}{1-2/5} = \frac{16}{15}.$

(c) $= \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{i}{3}} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} = \frac{1}{1-2/3} = 3.$

[4] Eine endliche Folge von wöchentlichen Zahlungen $a_i, i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag $|d|$ abnehmen, soll sich in n Wochen zu einem Wert s_n aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n aus d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $n = 10$ und $|d| = 3$ (also $d = -3$) werden festgelegt. Welchen Wert muss die erste Zahlung a_1 haben, damit das Summenziel $s_n = 665$ mit der letzten Zahlung a_{10} genau erreicht wird? Wie hoch ist dann die letzte Zahlung a_{10}?

Ergebniskontrolle:

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe].

(b) $665 = 10 \cdot a_1 - \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 3 \Rightarrow 800 = 10 \cdot a_1 \Rightarrow 80 = a_1$.

$a_{10} = 80 - 9 \cdot 3 = 53$.

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -10 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(a) $(B + A) \cdot C^T$

(b) C^{-1}

Ergebniskontrolle:

(a) $B + A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $C^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -10 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $(B + A) \cdot C^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 11 & 0 & 2 \\ 24 & 0 & -60 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

(b) C^{-1} ist nicht definiert, denn die zweite Zeile von C ist eine Nullzeile!

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	1	1	0
	Z_2	2	1	2
	Z_3	2	0	1

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	1	2	1
	R_2	2	1	1

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (3, 2)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 33 \\ 27 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (3, 2) \cdot \begin{pmatrix} 33 \\ 27 \end{pmatrix} = 153$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 20% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 20% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel $10\%, 0\%, 10\%, 21\%, 10\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.2^{\frac{1}{5}} \approx 1.04$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $11^5 = 161051$, $\ln 1.1 \approx 0.1$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_5 = 1.2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^5 \Leftrightarrow 1 + i = (1.2)^{\frac{1}{5}} \approx 1.04 \Leftrightarrow i = 0.04 = 4\%$

(b) $K_x = 1.2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.2)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.18}{0.1} = \frac{18}{10}$; $n = \lceil x \rceil = 2$

(c) $K_5 = (1.1 \cdot 1 \cdot 1.1 \cdot 1.21 \cdot 1.1) \cdot 100000 = (1.1)^5 \cdot 10^5 = 11^5 = 161051$

$i_{\text{eff}} = (1.1 \cdot 1 \cdot 1.1 \cdot 1.21 \cdot 1.1)^{\frac{1}{5}} - 1 = \left(1.1^5\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 1.1 - 1 = 0.1 = 10\%$

[5] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge von:

$$\frac{|x|^3 + x^2 + 4 \cdot |x|}{-2 \cdot |x|^3 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot |x| - 3} \geq -\frac{1}{2}$$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
& \frac{|x|^3 + x^2 + 4 \cdot |x|}{-2 \cdot |x|^3 - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot |x| - 3} \geq -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{|x|^3 + x^2 + 4 \cdot |x|}{2 \cdot |x|^3 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot |x| + 3} \leq \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & |x|^3 + x^2 + 4 \cdot |x| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot |x|^3 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot |x| + 3\right) = |x|^3 + x^2 + |x| + \frac{3}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & 3 \cdot |x| \leq \frac{3}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & |x| \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Also Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{1}{2} \text{ und } x \leq \frac{1}{2} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

[4] Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
-1	-3	1	1	0	0	I
-1	1	-1	0	1	0	II
2	2	1	0	0	1	III
1	3	-1	-1	0	0	$(-1) \cdot$ I
-1	1	-1	0	1	0	II
2	2	1	0	0	1	III
1	3	-1	-1	0	0	I
0	4	- 2	-1	1	0	II + I
0	- 4	3	2	0	1	III - 2 $\cdot$ I
1	3	-1	-1	0	0	I
0	1	- 1/2	-1/4	1/4	0	(1/4) $\cdot$ II
0	- 4	3	2	0	1	III
1	0	1/2	- 1/4	- 3/4	0	I - 3 $\cdot$ II
0	1	- 1/2	-1/4	1/4	0	II
0	0	1	1	1	1	III + 4 $\cdot$ II
1	0	0	- 3/4	-5/4	-1/2	I - 1/2 III
0	1	0	1/4	3/4	1/2	II + 1/2 III
0	0	1	1	1	1	III

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & -5/4 & -1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 3 & -1 & 1 & 12 \\ -2 & -5 & 1 & -3 & -20 \\ 0 & 4 & -4 & -4 & 16 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[5] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{B}$$

(i) Welche Dimension besitzt Y?

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus die allgemeine Lösung für Y.

Ergebniskontrolle:

(a) Beim LGS $Ax = b$ sind zwei Variablen frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad \begin{array}{rclcrcr} x_1 & = & & - & 2 \cdot x_3 & - & 4 \cdot x_4 \\ x_2 & = & 4 & + & x_3 & + & x_4 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & & & \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & & & \end{array} \right\}$$

(b) <u>zu (i)</u>:

$A_{3\times 4} \cdot Y_{m\times n} = B_{3\times 2}$, also $m = 4$ und $n = 2$.

<u>zu (ii)</u>:

x_1	x_2	x_3	x_4	b_1	b_2	Protokoll
1	2	1	0	0	-1	I
2	1	5	0	1	1	II
-1	1	- 4	0	- 1	- 2	III
1	2	1	0	0	-1	I
0	- 3	3	0	1	3	II - 2 · I
0	3	- 3	0	- 1	-3	III + I
1	2	1	0	0	-1	I
0	- 3	3	0	1	3	II
0	0	0	0	0	0	III + II
1	2	1	0	0	-1	I
0	1	- 1	0	-1/3	-1	$-1/3 \cdot$ II
0	0	0	0	0	0	III
1	0	3	0	2/3	1	I - 2 · II
0	1	- 1	0	-1/3	-1	II
0	0	0	0	0	0	III

Lösung Y von $A \cdot Y = B$ spaltenweise.

$$\mathbb{L}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 - 3 \cdot x_3 \\ -1/3 + x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad : \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 3 \cdot x_3 \\ -1 + x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad : \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei die x_3, x_4 in $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ unabhängig voneinander frei wählbar sind, d.h.

$$Y = \begin{pmatrix} (2/3 - 3 \cdot a) & (1 - 3 \cdot c) \\ (-1/3 + a) & (-1 + c) \\ a & c \\ b & d \end{pmatrix}_{4 \times 2} \qquad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$