Mathematik für Ökonomen – SS 2014 – Campus Duisburg

PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 2

22.07.2014, 11:00-13:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Korrekturabschnitt!

[4] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α, β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle" $x_0 = 1$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x \cdot (x+\alpha) & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ 3 & \text{für} \quad x = 1 \\ \beta + \ln x & \text{für} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 = 1:\ \lim\limits_{x \to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_-} \beta \cdot x \cdot (x+\alpha) = 1 \cdot \beta \cdot (1+\alpha) = \beta \cdot (1+\alpha)$

RGW in $x_0 = 1:\ \lim\limits_{x \to 1_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_+} \big(\beta + \ln x\big) = \beta + \ln 1 = \beta \overset{!}{=} f(1) = 3$

Also

$$3 = f(1) = \lim_{x \to 1_-} f(x) = \beta \cdot (1+\alpha) = \lim_{x \to 1_+} f(x) = \beta.$$

D.h. $\alpha = 0,\ \beta = 3$.

Gegeben $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$ mit $D(f) = [-2, 1/2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximalpunkte (Maximalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} \cdot (-x) = \frac{(x^2-1)\cdot e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$

$f''(0) = \frac{(-1)\cdot e^0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} < 0$

Also ist $x = 0$ eine lokale Maximalstelle mit $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

[3](b) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkten).

Ergebniskontrolle:

Ein Lösungsweg besteht in folgendem Vorgehen

$$f''(x) \begin{cases} > 0, \text{ für } x^2 > 1 \text{ und } x \in [-2, 1/2] \\ = 0, \text{ für } x^2 = 1 \text{ und } x \in [-2, 1/2] \\ < 0, \text{ für } x^2 < 1 \text{ und } x \in [-2, 1/2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad f''(x) \begin{cases} > 0, \text{ für } |x| > 1 \text{ und } x \in [-2, 1/2] \\ = 0, \text{ für } |x| = 1 \text{ und } x \in [-2, 1/2] \\ < 0, \text{ für } |x| < 1 \text{ und } x \in [-2, 1/2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad f''(x) \begin{cases} > 0, \text{ für } -2 \le x < -1 \\ = 0, \quad \text{ für } x = -1 \\ < 0, \text{ für } -1 < x \le 1/2 \end{cases}$$

Also f konvex über $[-2, -1]$ und f konkav über $[-1, 1/2]$. Außerdem besitzt f in $x = -1$ eine Wendestelle mit dem Funktionswert $f(-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2}$.

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^3 - 3\cdot x^2 - 3\cdot x - 1}{(x^2+x+1)^2 - 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 1}$ mit der L'Hospital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^3 - 3\cdot x^2 - 3\cdot x - 1}{(x^2+x+1)^2 - 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 1} &\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cdot(x+1)^2 - 6\cdot x - 3}{2\cdot(x^2+x+1)\cdot(2\cdot x+1) - 6\cdot x - 2} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6\cdot(x+1) - 6}{2\cdot(2\cdot x+1)^2 + 4\cdot(x^2+x+1) - 6} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6}{8\cdot(2\cdot x+1) + 4\cdot(2\cdot x+1)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

[4] Zur Berechnung der Rendite $i_{eff} = x - 1$ einer Anlageform ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$\frac{x^4}{4} + 2 \cdot x \stackrel{!}{=} 7$$

Beginnen Sie die Berechnung des Wertes von x mit Hilfe des Newton-Verfahrens, d.h. gefragt sind: Der allgemeine Ansatz und, beim Startwert $x_0 = 2$, eine Rechnung (erste Iteration) und der Ansatz für die zweite Iteration (einsetzen, nicht ausrechnen).

Ergebniskontrolle:

$f(x) = \frac{x^4}{4} + 2 \cdot x - 7 \stackrel{!}{=} 0$; $f'(x) = x^3 + 2$

- Erste Iteration: $x_1 = x_0 - (f(x_0)/f'(x_0)) = 2 - (f(2)/f'(2)) = 2 - (1/10) = 1.9$
- Zweite Iteration: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.9 - \frac{f(1.9)}{f'(1.9)} = [1.9 - \frac{\frac{1.9^4}{4} + 2 \cdot 1.9 - 7}{1.9^3 + 2} \approx 1.89345]$

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_1^6 f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 2 \cdot t^3 - 1/t^2 & \text{für } 1 \leq t < 2 \\ 3 \cdot e^{3 \cdot t - 2} + e^{t-2} & \text{für } 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\int_1^6 f(t)dt &= \int_1^2 (2 \cdot t^3 - 1/t^2)\ dt + \int_2^6 (3 \cdot e^{3 \cdot t - 2} + e^{t-2})dt \\
&= \int_1^2 2 \cdot t^3\ dt - \int_1^2 t^{-2}\ dt + \int_2^6 3 \cdot e^{3 \cdot t - 2}\ dt + \int_2^6 e^{t-2}dt \\
&= \left[\frac{2}{4} \cdot t^4\right]_1^2 - \left[-t^{-1}\right]_1^2 + \left[e^{3 \cdot t - 2}\right]_2^6 + \left[e^{t-2}\right]_2^6 \\
&= \left[\frac{1}{2} \cdot 16 - \frac{1}{2}\right] - \left[-2^{-1} + 1\right] + \left[e^{16} - e^4\right] + \left[e^4 - 1\right] \\
&= 8 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + e^{16} - e^4 + e^4 - 1 = 6 + e^{16}
\end{aligned}$$

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x t^{1/2} \cdot \ln t \; dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = 5/9$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:
Mit $f(t) = \ln t$, $g'(t) = t^{1/2}$ ist $f'(t) = t^{-1}$ und $g(t) = \frac{2}{3} \cdot t^{3/2}$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{5}{9} + \int\limits_1^x t^{1/2} \cdot \ln t \; dt = \frac{5}{9} + \left[\frac{2}{3} \cdot t^{3/2} \cdot \ln t\right]_1^x - \int\limits_1^x \frac{2}{3} \cdot t^{1/2} \; dt \\
&= \frac{5}{9} + \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \cdot \ln x - \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{3/2}\right]_1^x \\
&= \frac{5}{9} + \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \cdot \ln x - \left[\frac{4}{9} \cdot x^{3/2} - \frac{4}{9}\right] \\
&= 1 + \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \cdot \ln x - \frac{4}{9} \cdot x^{3/2}
\end{aligned}$$

[5] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = \ln(x-1)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 2$ und damit eine Näherung für den Funktionswert $f(3) = \ln 2$.

Ergebniskontrolle:

$f(2) = 0$; $f'(x) = (x-1)^{-1}$; $f'(2) = 1$; $f''(x) = -(x-1)^{-2}$; $f''(2) = -1$;

$T_2^f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 = (x-2) - \frac{1}{2} \cdot (x-2)^2$ mit $[x_0 = 2]$.

Damit ist $f(3) \approx T_2^f(3, 2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = x^2 \cdot y^2 \cdot e^y$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x, y) = 2 \cdot x \cdot y^2 \cdot e^y$

$f''_{xx}(x, y) = 2 \cdot y^2 \cdot e^y$

$f'_y(x, y) = x^2 \cdot (2 \cdot y \cdot e^y + y^2 \cdot e^y)$

$f''_{yy}(x, y) = x^2 \cdot (2 \cdot e^y + 2 \cdot y \cdot e^y + 2 \cdot y \cdot e^y + y^2 \cdot e^y) = x^2 \cdot e^y \cdot (2 + 4 \cdot y + y^2)$

$f''_{xy}(x, y) = f'_{yx}(x, y) = 2 \cdot x \cdot (2 \cdot y \cdot e^y + y^2 \cdot e^y) = 2 \cdot x \cdot y \cdot e^y \cdot (2 + y)$

[5] Die Gesamtnachfrage eines Gutes im EU-Wirtschaftraum sei modelliert durch die Funktion $f(x,y) = 100 \cdot x^{-2} \cdot y^3$ mit Preis $x > 0$ und mittlerem Einkommen $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 40$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Einkommenselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 1% vermindert und das mittlere Einkommen um 2% erhöht.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ mit

$$f'_x(x,y) = -200 \cdot x^{-3} \cdot y^3 \text{ und } f'_y(x,y) = 300 \cdot x^{-2} \cdot y^2.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (40, 10)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) = 40 \cdot \frac{-200 \cdot 40^{-3} \cdot 10^3}{100 \cdot 40^{-2} \cdot 10^3} = -\frac{2 \cdot 40^{-2}}{40^{-2}} = -2$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) = 10 \cdot \frac{300 \cdot 40^{-2} \cdot 10^2}{100 \cdot 40^{-2} \cdot 10^3} = \frac{10 \cdot 3}{10} = 3.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = -2 \cdot (-1)\% + 3 \cdot 2\% = 8\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(40,10)$ zu $f(39.6, 10.2)$ beträgt ca. 8%.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^2 \cdot y + y^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle:
$f'_x(x,y) = 4 \cdot x + 4 \cdot x \cdot y$
$f'_y(x,y) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'_x(x,y) & = & 0 \\ f'_y(x,y) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4 \cdot x + 4 \cdot x \cdot y & = & 0 \\ 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + x \cdot y & = & 0 \\ y & = & -x^2 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - x^3 & = & 0 \\ y & = & -x^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x \cdot (1 - x^2) & = & 0 \\ y & = & -x^2 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rclcrclcrcl} x & = & 0 & \text{oder} & x & = & -1 & \text{oder} & x & = & 1 \\ y & = & -x^2 \end{array} \right\}$$

Also sind die stationären Punkte: $P1 = (0,0), P2 = (-1,-1), P3 = (1,-1)$.

Zur Berechnung der Werte von $H_D(x,y) = f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0):

$f''_{xx}(x,y) = 4 + 4 \cdot y$
$f''_{yy}(x,y) = 2$
$f''_{xy}(x,y) = 4 \cdot x$

- $H_D(0,0) = 4 \cdot 2 - 0 = 8 > 0$ und $f''_{xx}(0,0) = 4 > 0 \Rightarrow (0,0)$ ist eine lokale Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(0,0) = 0$.
- $H_D(-1,-1) = 0 - 16 = -16 < 0 \Rightarrow (-1,-1)$ ist eine Sattelpunktstelle von f mit Funktionswert $f(-1,-1) = 1$.
- $H_D(1,-1) = 0 - 16 < 0 \Rightarrow (-1,1)$ ist eine Sattelpunktstelle mit Funktionswert $f(1,-1) = 1$.