# Mathematik für Ökonomen – SS 2015 – Campus Duisburg

PD Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

## Klausur Mathematik 2

21.07.2015, 11:00-13:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muß **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

**Platznummer**

**Matrikelnummer**

**Name**

**Vorname**

**Geburtsdatum** ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

**Unterschrift** ____________________________________________

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

________________________________________________________________

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[6] Die folgende Funktion $f$ ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen $\alpha, \beta$ rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle" $x_0 = 1$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot (x+\alpha)^2 & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ 3 & \text{für} \quad x = 1 \\ \beta + \ln x & \text{für} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

**Ergebniskontrolle:**

LGW in $x_0 = 1$ : $\lim\limits_{x \to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_-} \beta \cdot (x+\alpha)^2 = \beta \cdot (1+\alpha)^2$

RGW in $x_0 = 1$ : $\lim\limits_{x \to 1_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_+} \big(\beta + \ln x\big) = \beta + \ln 1 = \beta \overset{!}{=} f(1) = 3$

Also

$$3 = f(1) = \lim_{x \to 1_-} f(x) = \beta \cdot (1+\alpha)^2 = \lim_{x \to 1_+} f(x) = \beta.$$

D.h. $\beta = 3$ und $3 \cdot (1+\alpha)^2 = 3$.

Schließlich

$$\begin{aligned} & 3 \cdot (1+\alpha)^2 = 3 \\ \Leftrightarrow \quad & (1+\alpha)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 1+\alpha = -1 \quad \text{oder} \quad 1+\alpha = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha = -2 \quad \text{oder} \quad \alpha = 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $\alpha = 0$ und $\beta = 3$, oder $\alpha = -2$ und $\beta = 3$.

Gegeben $f(x) = x \cdot e^{-x}$ mit $D(f) = [0, 4]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
$f$ hat die Ableitung $f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x}$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximalpunkte (Maximalstellen und zugehörige Funktionswerte) von $f$ über dem Definitionsbereich.

**Ergebniskontrolle**:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - x \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + x \cdot e^{-x} = -2 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x}.$$

$$f''(1) = -2e^{-1} + e^{-1} = -e^{-1} < 0$$

Also ist $x = 1$ eine lokale Maximalstelle mit $f(1) = e^{-1}$.

[3](b) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von $f$ (konvex/konkav mit Wendepunkten).

**Ergebniskontrolle:**

$f''(x) = -2 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (x-2)$. Da $e^{-x}$ immer positiv ist, folgt

$f''(x) \leq 0$ für $x \in [0, 2]$, d.h. $f$ konkav über $[0, 2]$,

$f''(x) \geq 0$ für $x \in [2, 4]$, d.h. $f$ konvex über $[2, 4]$.

Außerdem gilt $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, d.h. $f$ besitzt in $x = 2$ eine Wendestelle mit dem Funktionswert $f(2) = 2 \cdot e^{-2}$.

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(x^2+2\cdot x+2)^2-2\cdot x^2-4\cdot x-3}{(x+2)^3-3\cdot x^2-9\cdot x-7}$ mit der L'Hospital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

**Ergebniskontrolle:**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-1} \frac{(x^2+2\cdot x+2)^2-2\cdot x^2-4\cdot x-3}{(x+2)^3-3\cdot x^2-9\cdot x-7} &\overset{\mathrm{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to-1} \frac{2\cdot(x^2+2\cdot x+2)\cdot(2\cdot x+2)-4\cdot x-4}{3\cdot(x+2)^2-6\cdot x-9} \\
&\overset{\mathrm{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to-1} \frac{2\cdot(2\cdot x+2)^2+4\cdot(x^2+2\cdot x+2)-4}{6\cdot(x+2)-6} \\
&\overset{\mathrm{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to-1} \frac{8\cdot(2\cdot x+2)+4\cdot(2\cdot x+2)}{6} = \frac{0}{6} = 0.
\end{aligned}$$

[5] Berechnen Sie das Integral $\int_2^{10} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} e^{t-2}+1 & \text{für } 2 \le t < 4 \\ 2\cdot t & \text{für } 4 \le t < 9 \\ -2\cdot e^{-2\cdot t+20} & \text{für } 9 \le t \le 10 \end{cases}$

**Ergebniskontrolle:**

$$
\begin{aligned}
& \int_2^{10} f(t)dt \\
= \ & \int_2^4 (e^{t-2}+1)\ dt + \int_4^9 2\cdot t\ dt + \int_9^{10} -2\cdot e^{-2\cdot t+20}\ dt \\
= \ & \int_2^4 e^{t-2}\ dt + \int_2^4 1\ dt + 2\cdot\int_4^9 t\ dt - 2\cdot\int_9^{10} e^{-2\cdot t+20}\ dt \\
= \ & \left[e^{t-2}\right]_2^4 + [t]_2^4 + 2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot t^2\right]_4^9 - 2\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot e^{-2\cdot t+20}\right]_9^{10} \\
= \ & \left[e^2-1\right] + [4-2] + 2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot 81 - \frac{1}{2}\cdot 16\right] - 2\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot e^2\right] \\
= \ & e^2 - 1 + 2 + 81 - 16 + 1 - e^2 = 67
\end{aligned}
$$

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x (4 \cdot t + 4) \cdot e^{2 \cdot t - 1}\ dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = 3 \cdot e^1$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

**Ergebniskontrolle:**
Mit $f(t) = 4 \cdot t + 4$, $g'(t) = e^{2 \cdot t - 1}$ ist $f'(t) = 4$ und $g(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot t - 1}$.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 3 \cdot e^1 + \int\limits_1^x (4 \cdot t + 4) \cdot e^{2 \cdot t - 1}\ dt \\
&= 3 \cdot e^1 + \left[ (4 \cdot t + 4) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot t - 1} \right]_1^x - \int_1^x 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot t - 1}\ dt \\
&= 3 \cdot e^1 + \left[ (2 \cdot x + 2) \cdot e^{2 \cdot x - 1} - 4 \cdot e^1 \right] - \int_1^x 2 \cdot e^{2 \cdot t - 1}\ dt \\
&= 3 \cdot e^1 + \left[ (2 \cdot x + 2) \cdot e^{2 \cdot x - 1} - 4 \cdot e^1 \right] - \left[ e^{2 \cdot t - 1} \right]_1^x \\
&= 3 \cdot e^1 + \left[ (2 \cdot x + 2) \cdot e^{2 \cdot x - 1} - 4 \cdot e^1 \right] - \left[ e^{2 \cdot x - 1} - e^1 \right] \\
&= 3 \cdot e^1 + 2 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x - 1} + 2 \cdot e^{2 \cdot x - 1} - 4 \cdot e^1 - e^{2 \cdot x - 1} + e^1 \\
&= 2 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x - 1} + e^{2 \cdot x - 1}
\end{aligned}
$$

[5] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und damit eine Näherung für den Funktionswert $f(1) = \ln 2$.

**Ergebniskontrolle:**

$f(0) = 0$; $f'(x) = \dfrac{2 \cdot x}{x^2 + 1}$; $f'(0) = 0$; $f''(x) = \dfrac{2 \cdot (x^2 + 1) - 4 \cdot x^2}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{-2 \cdot x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$; $f''(0) = 2$;

$T_2^f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 = x^2$ mit $[x_0 = 0]$.

Damit ist $f(1) \approx T_2^f(1, 0) = 1$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = x \cdot y \cdot e^{x+y}$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen $f'_x$, $f'_y$, sowie $f''_{xx}$, $f''_{yy}$ und $f''_{xy}$ (oder $f''_{yx}$).

**Ergebniskontrolle:**

$f'_x(x,y) = y \cdot e^{x+y} + x \cdot y \cdot e^{x+y}$

$f''_{xx}(x,y) = 2 \cdot y \cdot e^{x+y} + x \cdot y \cdot e^{x+y}$

$f'_y(x,y) = x \cdot e^{x+y} + x \cdot y \cdot e^{x+y}$

$f''_{yy}(x,y) = 2 \cdot x \cdot e^{x+y} + x \cdot y \cdot e^{x+y}$

$f''_{xy}(x,y) = f'_{yx}(x,y) = e^{x+y} + x \cdot e^{x+y} + y \cdot e^{x+y} + x \cdot y \cdot e^{x+y}$

[6] Betrachten Sie die Nachfragefunktion $f(x,y) = 200 \cdot x^{-1} \cdot y^4$ mit Preis $x > 0$ und mittlerem Einkommen $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle $(x_0, y_0)$ mit $x_0 = 50$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Einkommenselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion $f$ an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 1% erhöht und das mittlere Einkommen um 2% vermindert.

**Ergebniskontrolle:**

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ mit

$$f'_x(x,y) = -200 \cdot x^{-2} \cdot y^4 \text{ und } f'_y(x,y) = 800 \cdot x^{-1} \cdot y^3.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (50, 10)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) = 50 \cdot \frac{-200 \cdot 50^{-2} \cdot 10^4}{200 \cdot 50^{-1} \cdot 10^4} = -\frac{50^{-1}}{50^{-1}} = -1$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) = 10 \cdot \frac{800 \cdot 50^{-1} \cdot 10^3}{200 \cdot 50^{-1} \cdot 10^4} = \frac{4 \cdot 10^4}{10^4} = 4.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = (-1) \cdot 1\% + 4 \cdot (-2)\% = -9\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(50,10)$ zu $f(50.5, 9.8)$ beträgt ca. $-9\%$.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 4 \cdot x^3 + 2 \cdot y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $6 \cdot x + y = 12$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte)
**Hinweis zur Erinnerung:**

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

**Ergebniskontrolle:**

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = 6 \cdot x + y - 12 \stackrel{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = 4 \cdot x^3 + 2 \cdot y + \lambda \cdot (6 \cdot x + y - 12)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x,y) = 12 \cdot x^2$ und $f'_y(x,y) = 2$
  - $b'_x(x,y) = 6$ und $b'_y(x,y) = 1$
  - $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) = 12 \cdot x^2 + 6 \cdot \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) = 2 + \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = b(x,y) = 6 \cdot x + y - 12$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{\begin{array}{rcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 12 \cdot x^2 + 6 \cdot \lambda & = & 0 \\ 2 + \lambda & = & 0 \\ 6 \cdot x + y - 12 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 12 \cdot x^2 + 6 \cdot (-2) & = & 0 \\ \lambda & = & -2 \\ y & = & 12 - 6 \cdot x \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & 1 \\ \lambda & = & -2 \\ y & = & 12 - 6 \cdot x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rclcrcl} x & = & -1 & \text{oder} & x & = & 1 \\ \lambda & = & -2 & & & & \\ y & = & 18 & \text{oder} & y & = & 6 \end{array}\right\}$$

  Also sind die stationären Punkte: $P1 = (-1, 18), P2 = (1, 6)$ mit $\lambda = -2$
- Zur Berechnung der Werte von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für jeden stationären Punkt $(x_0, y_0)$ mit zugehörigem $\lambda_0$:
  - $f''_{xx}(x,y) = 24 \cdot x$
  - $f''_{yy}(x,y) = f''_{xy}(x,y) = 0$
  - $b''_{xx}(x,y) = b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = 0.$
- Berechnung der Werte von $(x_0, y_0, \lambda_0)$ für jeden stationären Punkt $(x_0, y_0)$ mit zugehörigem $\lambda_0$
  - $D_0(-1, 18, -2) = -24 \cdot 1^2 - 2 \cdot 0 + 0 = -24 < 0 \Rightarrow (-1, 18)$ ist eine lokale Maximalstelle von $f$ unter der Nebenbedingung $6 \cdot x + y = 12$ mit Funktionswert $f(-1, 18) = 32$.
  - $D_0(1, 6, -2) = 24 \cdot 1^2 - 2 \cdot 0 + 0 = 24 > 0 \Rightarrow (1, 6)$ ist eine lokale Minimmalstelle von $f$ unter der Nebenbedingung $6 \cdot x + y = 12$ mit Funktionswert $f(1, 6) = 16$.