Mathematik für Ökonomen – SS 2016 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 1

26.07.2016, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Korrektur:

Aufg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe	Note
Punkte											
	10	4	6	4	4	6	5	4	7	50	
Korr											

Aufgabe 1

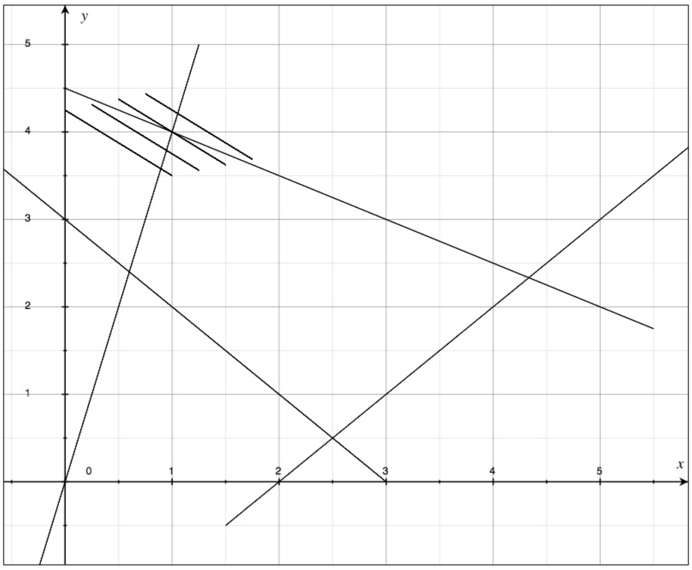
Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[3] **(a)** Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

$$\begin{array}{ll} \textbf{(1)} & 2\cdot y \;+\; x \;\leq\; 9 \\ \textbf{(2)} & y \;-\; 4\cdot x \leq\; 0 \\ \textbf{(3)} & y \;-x \geq\; -2 \\ \textbf{(4)} & y + x \geq 3 \end{array}$$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{(x,y) : y \leq -\frac{1}{2}\cdot x + \frac{9}{2} \text{ und } y \leq 4\cdot x \text{ und } y \geq x-2 \text{ und } y \geq -x+3\right\}$$



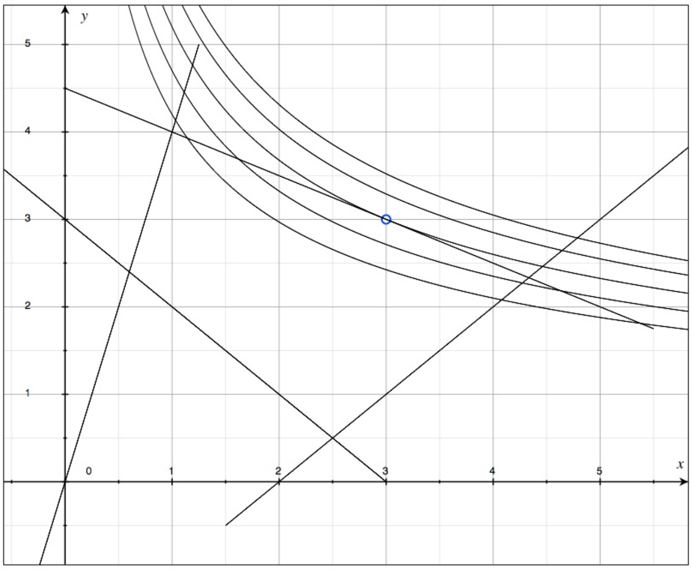
(Ersatzvorlage siehe Anhang)

[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = \frac{3}{4}\cdot x + y$ „halbgraphisch“ : Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Ergebniskontrolle:
Zielgeradenschar: $y = z - \frac{3}{4}\cdot x$.
Da $b = 1 > 0$ in $z = a\cdot x + b\cdot y$, bedeutet Maximierung von z eine Verschiebung nach oben. Die Maximalstelle (x_0, y_0) ergibt sich als Schnittpunkt der Beschränkungsgeraden (1) $y = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\cdot x$ und (2) $y = 4\cdot x$. Gleichsetzen von (1) und (2) liefert $\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\cdot x = 4\cdot x$ und damit $x_0 = 1$. Eingesetzt in (1) oder (2) erhält man $y_0 = 4$. Die Maximalstelle $(x_0 = 1, y_0 = 4)$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt den Maximalwert $z_0 = \frac{19}{4}$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x^{\frac{1}{2}} y$ „halbgraphisch“ : Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalem z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) korrekt in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Ergebniskontrolle:
Optisch ergibt sich (1) als relevante Beschränkungsgerade. Berührung im “Innern” des Geradenstücks, also Tangentiallösung.
Zur Berechnung der Tangentiallösung:

a) Einsetzen von (1) $y = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \cdot x$ in die Zielfunktion: $z = f(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \cdot x) = \frac{9}{2} \cdot x^{1/2} - \frac{1}{2} \cdot x^{3/2}$.

b) $f'(x) = \frac{9}{4} \cdot x^{-1/2} - \frac{3}{4} \cdot x^{1/2}$

c) $f'(x)$ gleich 0 setzen und x auflösen, liefert $x_0 = 3$. Einsetzen in die Beschränkungsgerade ergibt $y_0 = 3$.

d) Maximalwert: $z_0 = x_0^{1/2} \cdot y_0 = 3^{1/2} \cdot 3 = 3^{3/2}$.

[4] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 \cdot n^5 \ - \ 7 \cdot n^3 \ + 1}{6 \cdot n^5 \ + 4 \cdot n^2 \ - \ 17 \cdot n} = ?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{3^{k-2}}{4^{k-1}} = ?$

Untere Summengrenze beachtet?

Ergebniskontrolle:

(a) $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot n^5 \ - \ 7 \cdot n^3 \ + 1}{6 \cdot n^5 \ + 4 \cdot n^2 \ - \ 17 \cdot n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 \cdot (3 - 7 \cdot n^{-2} + n^{-5})}{n^5 \cdot (6 + 4 \cdot n^{-3} - 17 \cdot n^{-4})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 7 \cdot n^{-2} + n^{-5}}{6 + 4 \cdot n^{-3} - 17 \cdot n^{-4}} = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{3^{k-2}}{4^{k-1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{3^k}{4^{k+1}} = \tfrac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{4^k} = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{1-3/4} = 1.$$

[6] Eine endliche Folge von wöchentlichen Zahlungen $a_i, i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag $|d|$ abnehmen, soll sich in n Wochen zu einem Wert s_n aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n basierend auf d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $n = 10$ und $|d| = 6$ (also $d = -6$) werden festgelegt. Welchen Wert muss die erste Zahlung a_1 haben, damit das Summenziel $s_n = 330$ mit der letzten Zahlung a_{10} genau erreicht wird? Wie hoch ist dann die letzte Zahlung a_{10}?

(c) Seien $a_1 = 45$ und $|d| = 6$ (also $d = -6$) festgelegt. Welchen Wert muss die Anzahl n haben, um das Summenziel $s_n = 180$ genau zu erreichen, wobei *keine negativen Zahlungen* a_i zugelassen sein sollen.

Ergebniskontrolle:

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe].

(b) $330 = 10 \cdot a_1 - \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 6 \Rightarrow 600 = 10 \cdot a_1 \Rightarrow 60 = a_1$.

$a_{10} = 60 - 9 \cdot 6 = 6$.

(c) $180 = n \cdot 45 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-6) = 48 \cdot n - 3 \cdot n^2$

$n^2 - 16 \cdot n + 60 \overset{!}{=} 0$, mit den Lösungen $n \in \{8-2, 8+2\} = \{6, 10\}$.

Wir haben $a_6 = 45 + 5 \cdot (-6) = 15 > 0$ und $a_{10} = 45 + 9 \cdot (-6) = -9 < 0$.

Also entfällt Lösung $n = 10$, da negative Zahlungen nicht zugelassen sind, d.h. $n = 6$.

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad ; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \; C = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

(a) $(A^T \cdot A) + B$

(b) C^{-1}

Ergebniskontrolle:

(a) $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$; $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $(A^T \cdot A) + B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$.

(b) C^{-1} ist nicht definiert, denn C ist keine quadratische Matrix!

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	6	4	8
	Z_2	4	2	2
	Z_3	2	4	2

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	2	3	1
	R_2	1	3	3

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 3)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 18 & 24 \\ 24 & 22 & 20 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 104 \\ 110 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 104 \\ 110 \end{pmatrix} = 538$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_3 um 30% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 30% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $69\%, 30\%, 0\%, 30\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.3^{\frac{1}{3}} \approx 1.09$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.3 \approx 0.26$, $13^4 = 28561$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_3 = 1.3 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^3 \Leftrightarrow 1 + i = (1.3)^{\frac{1}{3}} \approx 1.09 \Leftrightarrow i = 0.09 = 9\%$

(b) $K_x = 1.3 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.3)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.26}{0.1} = \frac{26}{10}$; $n = \lceil x \rceil = 3$

(c) $K_4 = (1.69 \cdot 1.3 \cdot 1 \cdot 1.3) \cdot 10000 = 169 \cdot 13 \cdot 13 = 13^4 = 28561$

$i_{\text{eff}} = (1.69 \cdot 1.3 \cdot 1 \cdot 1.3)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(1.3^4\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1.3 - 1 = 0.3 = 30\%$

[5] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge von:

$$e^{(16+(x-3)^2)} \geq e^{25}$$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned} e^{(16+(x-3)^2)} \geq e^{25} \quad & \Leftrightarrow \quad 16+(x-3)^2 \geq 25 \\ & \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 \geq 9 \\ & \Leftrightarrow \quad |x-3| \geq 3 \\ & \Leftrightarrow \quad x-3 \leq -3 \quad \text{oder} \quad x-3 \geq 3 \\ & \Leftrightarrow \quad x \leq 0 \quad \text{oder} \quad x \geq 6 \end{aligned}$$

Also Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \text{ oder } x \geq 6\} \ =]-\infty, 0] \cup [6, \infty[.$$

[4] Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
-1	1	1	1	0	0	I
1	3	-1	0	1	0	II
2	2	1	0	0	1	III
1	-1	-1	-1	0	0	$(-1)\cdot$ I
1	3	-1	0	1	0	II
2	2	1	0	0	1	III
1	-1	-1	- 1	0	0	I
0	4	0	1	1	0	II - I
0	4	3	2	0	1	III - 2· I
1	-1	-1	-1	0	0	I
0	1	0	1/4	1/4	0	(1/4) · II
0	4	3	2	0	1	III
1	0	-1	-3/4	1/4	0	I + II
0	1	0	1/4	1/4	0	II
0	0	3	1	- 1	1	III - 4 · II
1	0	-1	-3/4	1/4	0	I
0	1	0	1/4	1/4	0	II
0	0	1	1/3	-1/3	1/3	(1/3)· III
1	0	0	-5/12	-1/12	1/3	I + III
0	1	0	1/4	1/4	0	II
0	0	1	1/3	-1/3	1/3	III

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -5/12 & -1/12 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9 Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & 13 \end{array} \quad \overset{\text{Gauß-Jordan}}{\longrightarrow \cdots \longrightarrow} \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \text{-1} & 0 & \text{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[5] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & -6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus den Rang der Matrix A.

(ii) Welchen Rang besitzt die Matrix $A \cdot 0_{4\times 3}$? (mit Begründung bitte)

Ergebniskontrolle:

(a) Beim LGS $Ax = b$ sind zwei Variablen frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 7 & - & 2 \cdot x_3 & - & x_4 \\ x_2 & = & -3 & + & x_3 & & \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & & & \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & & & \end{array} \right\}$$

(b) <u>zu (i)</u>:

Der Rang der Matrix A kann aus dem Endtableau des GJ-Algorithmus zur Lösung des linearen Gleichungssymstems $Ax = 0$ abgelesen werden.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Protokoll
1	3	-1	1	0	I
4	3	5	4	0	II
1	- 6	8	1	0	III
1	3	-1	1	0	I
0	-9	9	0	0	II - 4· I
0	-9	9	0	0	III - I
1	3	- 1	1	0	I
0	1	-1	0	0	$(-1/9)$·II
0	-9	9	0	0	III
1	0	2	1	0	I - 3· II
0	1	-1	0	0	II
0	0	0	0	0	III + 9· II

Also besitzt Matrix A den Rang 2.

zu (ii):

$A \cdot 0_{4\times 3} = 0_{3\times 3}$. Da jede Null-Matrix den Rang 0 besitzt, folgt Rang von $A \cdot 0_{4\times 3} = 0$.