Mathematik für Ökonomen – SS 2016 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 2

26.07.2016, 11:00-13:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Korrektur:

Aufg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe	Note
Punkte											
	6	6	4	5	4	5	5	6	9	50	
Korr											

[6] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α, β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle" $x_0 = 1$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} \beta - 3 \cdot \sqrt{x} & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ -4 & \text{für} \quad x = 1 \\ \beta \cdot (x+\alpha)^2 & \text{für} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 = 1: \lim\limits_{x \to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_-} \left(\beta - 3 \cdot \sqrt{x}\right) = \beta - 3$

RGW in $x_0 = 1: \lim\limits_{x \to 1_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_+} \beta \cdot (x+\alpha)^2 = \beta \cdot (1+\alpha)^2$

Wegen Stetigkeit von f in $x_0 = 1$ muß gelten

$$-4 = f(1) \overset{!}{=} \lim_{x \to 1_-} f(x) \overset{!}{=} \lim_{x \to 1_+} f(x).$$

Dies führt zu den Gleichungen

$$-4 = \beta - 3 \quad \text{und} \quad -4 = \beta \cdot (1+\alpha)^2.$$

D.h. $\beta = -1$ und $(-1) \cdot (1+\alpha)^2 = -4$.

Schließlich

$$\begin{aligned} & (-1) \cdot (1+\alpha)^2 = -4 \\ \Leftrightarrow \quad & (1+\alpha)^2 = 4 \\ \Leftrightarrow \quad & 1+\alpha = -2 \quad \text{oder} \quad 1+\alpha = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha = -3 \quad \text{oder} \quad \alpha = 1 \end{aligned}$$

Also für $\alpha = -3, \beta = -1$ und für $\alpha = 1, \beta = -1$ ist f an der Nahtstelle $x_0 = 1$ stetig.

Gegeben $f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2/2}$ mit $D(f) = [-2, 2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = -\frac{x}{2} \cdot e^{-x^2/2}$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximalpunkte (Maximalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} \cdot e^{-x^2/2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2/2} + \frac{x^2}{2} \cdot e^{-x^2/2} = \frac{x^2-1}{2} \cdot e^{-x^2/2}$.

$f''(0) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-0} = -\frac{1}{2} < 0$

Also ist $x = 0$ eine lokale Maximalstelle mit $f(0) = \frac{1}{2} \cdot e^{-0} = \frac{1}{2}$.

[3](b) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkten).

Ergebniskontrolle:

Untersuchung auf Vorzeichenbereiche von $f''(x)$. Dazu zunächst Bestimmung der Nullstellen von $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2} \cdot e^{-x^2/2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{oder} \quad x = 1. \end{aligned}$$

3 Möglichkeiten, fortzufahren

<u>1.Möglichkeit (mit dritter Ableitung):</u>

$f'''(x) = x \cdot e^{-x^2/2} - \frac{x^3-x}{2} \cdot e^{-x^2/2}$

$f'''(-1) = -e^{-1/2} < 0 \quad \text{und} \quad f'''(1) = e^{-1/2} > 0$

Daher

$f''(x) \geq 0$ für $x \in [-2, -1]$ und $x \in [1, 2]$ d.h. f konvex über $[-2, -1]$ und $[1, 2]$,

$f''(x) \leq 0$ für $x \in [-1, 1]$, d.h. f konkav über $[-1, 1]$.

Außerdem gilt f besitzt in $x = -1$ und $x = 1$ jeweils eine Wendestelle mit den Funktionswerten $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2} \cdot e^{-1/2}$.

<u>2.Möglichkeit (ohne dritte Ableitung):</u>

Da die zweite Ableitungsfunktion stetig ist, und f'' nur in $x = -1$ und $x = 1$ Nullstellen besitzt, hat f'' auf $[-2, -1[$, $]-1, 1[$ und $]1, 2]$ jeweils nur 1 Vorzeichen.

$$f''(-2) = \frac{3}{2} \cdot e^{-2} > 0, \text{ also } f''(x) \geq 0 \text{ für } x \in [-2, -1], \text{ d.h. } f \text{ konvex über } [-2, -1].$$

$$f''(0) = \frac{-1}{2} \cdot e^{-0} = -\frac{1}{2} < 0, \text{ also } f''(x) \leq 0 \text{ für } x \in [-1, 1], \text{ d.h. } f \text{ konkav über } [-1, 1].$$

$$f''(2) = \frac{3}{2} \cdot e^{-2} > 0, \text{ also } f''(x) \geq 0 \text{ für } x \in [1, 2], \text{ d.h. } f \text{ konvex über } [1, 2].$$

Außerdem gilt f besitzt in $x = -1$ und $x = 1$ jeweils eine Wendestelle mit den Funktionswerten $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2} \cdot e^{-1/2}$.

3.Möglichkeit (direktes Erkennen):

$$\begin{array}{llcll}
 & f''(x) > 0 & \qquad & & f''(x) < 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{x^2-1}{2} \cdot e^{-x^2/2} > 0 & & \Leftrightarrow & \frac{x^2-1}{2} \cdot e^{-x^2/2} < 0 \\
\Leftrightarrow & x^2 - 1 > 0 & & \Leftrightarrow & x^2 - 1 < 0 \\
\Leftrightarrow & |x|^2 > 1 & & \Leftrightarrow & |x|^2 < 1 \\
\Leftrightarrow & |x| > 1 & & \Leftrightarrow & |x| < 1 \\
\Leftrightarrow & x < -1 \text{ oder } x > 1 & & \Leftrightarrow & x > -1 \text{ und } x < 1
\end{array}$$

D.h.

$$f''(x) \leq 0 \text{ für } x \in [-2, -1] \text{ oder für } x \in [1, 2], \text{ also } f \text{ konvex über } [-2 - 1] \text{ und } [1, 2].$$

$$f''(x) \leq 0 \text{ für } x \in [-1, 1], \text{ also } f \text{ konkav über } [-1, 1].$$

Außerdem gilt f besitzt in $x = -1$ und $x = 1$ jeweils eine Wendestelle mit den Funktionswerten $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2} \cdot e^{-1/2}$.

[4] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+1)}{e^x - x - 1}$ mit der L'Hospital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{e^x - x - 1} &\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\cdot x}{x^2+1}}{e^x - 1} \\ &\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\cdot(x^2+1)-4\cdot x^2}{(x^2+1)^2}}{e^x} = \frac{\frac{2-0}{1}}{e^0} = 2\end{aligned}$$

[5] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{e^2} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 3\cdot(t^2+1) & \text{für } \ 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{für } \ 1 \le t < e^1 \\ \dfrac{-3}{t} & \text{für } \ e^1 \le t \le e^2 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{e^2} f(t)dt \\
= \quad & \int_0^1 3\cdot(t^2+1)\ dt + \int_1^{e^1} 1\ dt + \int_{e^1}^{e^2} \frac{-3}{t}\ dt \\
= \quad & 3\cdot\int_0^1 t^2\ dt + 3\cdot\int_0^1 1\ dt + \int_1^{e^1} 1\ dt - 3\cdot\int_{e^1}^{e^2} 1/t\ dt \\
= \quad & 3\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot x^3\right]_0^1 + 3\cdot[t]_0^1 + [t]_1^{e^1} - 3\cdot[\ln t]_{e^1}^{e^2} \\
= \quad & 3\cdot\left[\frac{1}{3} - 0\right] + 3\cdot[1-0] + \left[e^1 - 1\right] - 3\cdot[2-1] \\
= \quad & 1 + 3 + e^1 - 1 - 3 = e^1
\end{aligned}$$

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x 3 \cdot t^2 \cdot \ln t \; dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = -1/3$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:
Mit $f(t) = \ln t$, $g'(t) = 3 \cdot t^2$ ist $f'(t) = t^{-1}$ und $g(t) = t^3$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= -1/3 + \int\limits_1^x 3 \cdot t^2 \cdot \ln t \; dt \\
&= -1/3 + \left[t^3 \cdot \ln t\right]_1^x - \int_1^x t^3 \cdot t^{-1} \; dt \\
&= -1/3 + \left[x^3 \cdot \ln x - 0\right] - \int_1^x t^2 \; dt \\
&= -1/3 + x^3 \cdot \ln x - \left[\frac{1}{3} \cdot t^3\right]_1^x \\
&= -1/3 + x^3 \cdot \ln x - \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{3}\right] \\
&= x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot x^3
\end{aligned}$$

[5] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = (\ln x)^2$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ und damit eine Näherung für den Funktionswert $f(2) = (\ln 2)^2$.

Ergebniskontrolle:

$f(1) = 0$; $f'(x) = \dfrac{2 \cdot \ln x}{x}$; $f'(1) = 0$; $f''(x) = \dfrac{2 - 2 \cdot \ln x}{x^2}$; $f''(1) = 2$;

$T_2^f(x; 1) := f(1) + \frac{f'(1)}{1!} \cdot (x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!} \cdot (x-1)^2 = (x-1)^2.$

Damit ist $f(2) \approx T_2^f(2, 1) = 1$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = (1+x) \cdot y \cdot e^{x-y}$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x,y) = y \cdot e^{x-y} + (1+x) \cdot y \cdot e^{x-y}$

$f''_{xx}(x,y) = 2 \cdot y \cdot e^{x-y} + (1+x) \cdot y \cdot e^{x-y}$

$f'_y(x,y) = (1+x) \cdot e^{x-y} - (1+x) \cdot y \cdot e^{x-y} = (1+x) \cdot (1-y) \cdot e^{x-y}$

$f''_{yy}(x,y) = -(1+x) \cdot e^{x-y} - (1+x) \cdot (1-y) \cdot e^{x-y}$

$f''_{xy}(x,y) = f'_{yx}(x,y) = (1-y) \cdot e^{x-y} + (1+x) \cdot (1-y) \cdot e^{x-y} = (2+x) \cdot (1-y) \cdot e^{x-y}$

[6] Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = 100 \cdot x^{3/2} \cdot y^{1/2}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit vom Rohstoffpreis $x > 0$ und den Transportkosten $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 50$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Rohstoffpreiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Transportkostenelastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 2% vermindert und die Transportkosten um 8% erhöhen.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 50 \cdot \frac{f'_x(50,10)}{f(50,10)}$ und $\mathcal{E}_y^f(50, 10) = 10 \cdot \frac{f'_y(50,10)}{f(50,10)}$ mit

$$f'_x(x, y) = 150 \cdot x^{1/2} \cdot y^{1/2} \text{ und } f'_y(x, y) = 50 \cdot x^{3/2} \cdot y^{-1/2}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (50, 10)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 50 \cdot \frac{150 \cdot 50^{1/2} \cdot 10^{1/2}}{100 \cdot 50^{3/2} \cdot 10^{1/2}} = \frac{150}{100} = 1.5$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 10 \cdot \frac{50 \cdot 50^{3/2} \cdot 10^{-1/2}}{100 \cdot 50^{3/2} \cdot 10^{1/2}} = \frac{50}{100} = 0.5.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = 1.5 \cdot (-2)\% + 0.5 \cdot 8\% = 1\%$

d.h. eine 2% Verminderung des Rohstoffpreises bei gleichzeitiger 8% Erhöhung der Transportkosten führt zu einer ungefähr 1% Erhöhung der Herstellungskosten.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = 6 \cdot x + 4 \cdot y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $x^3 + 2 \cdot y = 5$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte)
Hinweis zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} & D(x, y, \lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x, y)) \cdot (b'_y(x, y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x, y)) \cdot b'_x(x, y) \cdot b'_y(x, y) \\ & +(f''_{yy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x, y)) \cdot (b'_x(x, y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x, y) = x^3 + 2 \cdot y - 5 \stackrel{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x, y, \lambda) = 6 \cdot x + 4 \cdot y + \lambda \cdot (x^3 + 2 \cdot y - 5)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x, y) = 6$ und $f'_y(x, y) = 4$
  - $b'_x(x, y) = 3 \cdot x^2$ und $b'_y(x, y) = 2$
  - $L'_x(x, y, \lambda) = f'_x(x, y) + \lambda \cdot b'_x(x, y) = 6 + 3 \cdot \lambda \cdot x^2$
  - $L'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + \lambda \cdot b'_y(x, y) = 4 + 2 \cdot \lambda$
  - $L'_\lambda(x, y, \lambda) = b(x, y) = x + 2 \cdot y - 5$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{\begin{array}{rcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 6 + 3 \cdot \lambda \cdot x^2 & = & 0 \\ 4 + 2 \cdot \lambda & = & 0 \\ x^3 + 2 \cdot y - 5 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 6 + 3 \cdot (-2) \cdot x^2 & = & 0 \\ \lambda & = & -2 \\ y & = & \frac{5-x^3}{2} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & 1 \\ \lambda & = & -2 \\ y & = & \frac{5-x^3}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rclcrcl} x & = & -1 & \text{oder} & x & = & 1 \\ \lambda & = & -2 & & & & \\ y & = & 3 & \text{oder} & y & = & 2 \end{array}\right\}$$

  Also sind die stationären Punkte: $P1 = (-1, 3), P2 = (1, 2)$ mit $\lambda = -2$

- Zur Berechnung der Werte von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0:
  - $f''_{xx}(x, y) = f''_{yy}(x, y) = f''_{xy}(x, y) = 0$
  - $b''_{xx}(x, y) = 6 \cdot x$
  - $b''_{xy}(x, y) = b''_{yx}(x, y) = b''_{yy}(x, y) = 0.$
- Berechnung der Werte von (x_0, y_0, λ_0) für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0
  - $D_0(-1, 3, -2) = (0 + 12) \cdot 2^2 - 2 \cdot 0 + 0 = 48 > 0 \Rightarrow (-1, 3)$ ist eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $x^3 + 2 \cdot y = 5$ mit Funktionswert $f(-1, 3) = 6$.
  - $D_0(1, 2, -2) = (0 - 12) \cdot 2^2 - 2 \cdot 0 + 0 = -48 < 0 \Rightarrow (1, 6)$ ist eine lokale Maximmalstelle von f unter der Nebenbedingung $x^3 + 2 \cdot y = 5$ mit Funktionswert $f(1, 2) = 14$.