Mathematik für Ökonomen – SS 2017 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

01.08.2017, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y \; - \; 2 \cdot x \; \leq \; 2$

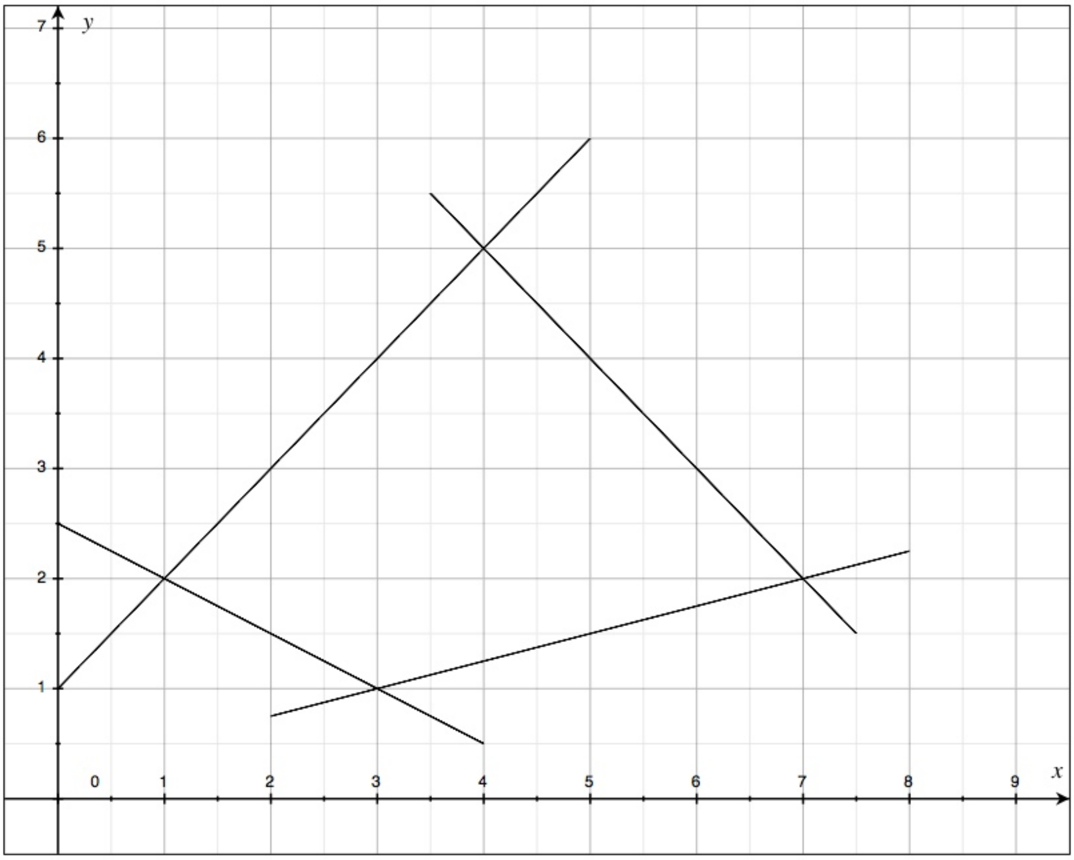
(2) $2 \cdot y \; + \; x \geq \; 5$

(3) $2 \cdot y \; - \frac{1}{2} \cdot x \geq \; \frac{1}{2}$

(4) $y + x \leq 9$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{ (x, y) : y \leq 1 + x \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \text{ und } y \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x \text{ und } y \leq 9 - x \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	4	2	2
	Z_2	6	4	8
	Z_3	2	2	4

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	1	3	2
	R_2	3	2	3

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (3, 2)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 18 & 34 \\ 30 & 20 & 34 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 140 \\ 154 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (3, 2) \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 154 \end{pmatrix} = 728$

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & 4 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[4] (b) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

(a) Beim LGS $Ax = b$ ist 1 Variable frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & -1 & - & x_4 \\ x_2 & = & x_4 & - & 4 \\ x_3 & = & 1 & - & x_4 \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & \end{array} \right\}$$

(b)

x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	e_4	Protokoll
2	0	0	0	1	0	0	0	I
0	1	1	1	0	1	0	0	II
0	-1	3	-1	0	0	1	0	III
0	-2	2	1	0	0	0	1	IV
1	0	0	0	1/2	0	0	0	(1/2)· I
0	1	1	1	0	1	0	0	II
0	-1	3	-1	0	0	1	0	III
0	-2	2	1	0	0	0	1	IV
1	0	0	0	1/2	0	0	0	I
0	1	1	1	0	1	0	0	II
0	0	4	0	0	1	1	0	III + II
0	0	4	3	0	2	0	1	IV + 2· II
1	0	0	0	1/2	0	0	0	I
0	1	1	1	0	1	0	0	II
0	0	1	0	0	1/4	1/4	0	(1/4)· III
0	0	4	3	0	2	0	1	IV

1	0	0	0	1/2	0	0	0	I
0	1	0	1	0	3/4	-1/4	0	II - III
0	0	1	0	0	1/4	1/4	0	III
0	0	0	3	0	1	-1	1	IV - 4· III
1	0	0	0	1/2	0	0	0	I
0	1	0	1	0	3/4	-1/4	0	II
0	0	1	0	0	1/4	1/4	0	III
0	0	0	1	0	1/3	-1/3	1/3	(1/3)· IV
1	0	0	0	1/2	0	0	0	I
0	1	0	0	0	5/12	1/12	-1/3	II - IV
0	0	1	0	0	1/4	1/4	0	III
0	0	0	1	0	1/3	-1/3	1/3	IV

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/12 & 1/12 & -1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 8$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_8 um 125% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 5\%$ und ein Zielwert K_x, der 125% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $125\%, 50\%, 0\%, 50\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $2.25^{\frac{1}{8}} \approx 1.11$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.05 \approx 0.05$, $15^4 = 50625$, $\ln 2.25 \approx 0.81$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_8 = 2.25 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^8 \Leftrightarrow 1 + i = (2.25)^{\frac{1}{8}} \approx 1.11 \Leftrightarrow i = 0.11 = 11\%$

(b) $K_x = 2.25 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.05)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2.25)}{\ln(1.05)} \approx \frac{0.81}{0.05} = \frac{81}{5}$; $n = \lceil x \rceil = 17$

(c) $K_4 = (2.25 \cdot 1.5 \cdot 1 \cdot 1.5) \cdot 10000 = 225 \cdot 15 \cdot 15 = 15^4 = 50625$

$i_{\text{eff}} = (2.25 \cdot 1.5 \cdot 1 \cdot 1.5)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(1.5^4\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1.5 - 1 = 0.5 = 50\%$

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion f an der „Nahtstelle" $x_0 = 1$ *stetig* ist:

$$f(x) = \begin{cases} 3^{x^2} - 1 & \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ \ln(x^3 + e^2 - 1) & \text{für} \quad 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 = 1$: $\lim\limits_{x \to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_-} \left(3^{x^2} - 1\right) = 3^1 - 1 = 2$

RGW in $x_0 = 1$: $\lim\limits_{x \to 1_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_+} \ln(x^3 + e^2 - 1) = \ln(1 + e^2 - 1) = \ln(e^2) = 2$

FW in x_0 =1: $f(1) = \ln(1 + e^2 - 1) = \ln(e^2) = 2$

Also gilt LGW = RGW = FW, und somit ist f stetig in $x_0 = 1$.

Gegeben $f(x) = -x^3 + 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 1$ mit $D(f) = [-2, 2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = -3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 9$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{oder} \quad x = 3. \end{aligned}$$

$-1 \in D(f)$, $3 \notin D(f)$, also $x = -1$ einzige stationäre Stelle.

$f''(x) = -6 \cdot x + 6$

$f''(-1) = 12 > 0$, also $x = -1$ lokale Minimalstelle mit $f(-1) = -4$

[3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(-2) = 3$ und $f(2) = 23$, außerdem $(-1, -4)$ einzige lokale Extremstelle, daher

-4 minimaler Wert von $f(-2), f(-1), f(2)$, also $(-1, -4)$ globaler Minimalpunkt

23 maximaler Wert von $f(-2), f(-1), f(2)$, also $(2, 23)$ globaler Maximalpunkt

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_{-1/2}^{1} f(t)\, dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} e^{1+2\cdot t} & \text{für } -1/2 \leq t < 0 \\ 3 \cdot t^5 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1/2}^{1} f(t)dt &= \int_{-1/2}^{0} e^{1+2\cdot t}\, dt + \int_{0}^{1} 3 \cdot t^5\, dt \\
&= \int_{-1/2}^{0} e^{1+2\cdot t}\, dt + 3 \cdot \int_{0}^{1} t^5\, dt \\
&= \left[e^{1+2\cdot t}/2\right]_{-1/2}^{0} + 3 \cdot \left[t^6/6\right]_0^1 \\
&= \left[e^1/2 - e^0/2\right] + 3 \cdot \left[1^3/6 + 0\right] \\
&= e^1/2 - 1/2 + 1/2 = e^1/2
\end{aligned}
$$

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(0) + \int_0^x (3 \cdot t + 1) \cdot e^{3 \cdot t}\ dt$, wobei $F(0)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(0) = -1$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:

Mit $f(t) = 3 \cdot t + 1$, $g'(t) = e^{3 \cdot t}$ ist $f'(t) = 3$ und $g(t) = \dfrac{e^{3 \cdot t}}{3}$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= -1 + \int\limits_0^x (3 \cdot t + 1) \cdot e^{3 \cdot t}\ dt \\
&= -1 + \left[\frac{3 \cdot t + 1}{3} \cdot e^{3 \cdot t}\right]_0^x - \int_0^x e^{3 \cdot t}\ dt \\
&= -1 + \left[\frac{3 \cdot x + 1}{3} \cdot e^{3 \cdot x} - \frac{1}{3}\right] - \left[\frac{e^{3 \cdot t}}{3}\right]_0^x \\
&= -1 + \left[\frac{3 \cdot x + 1}{3} \cdot e^{3 \cdot x} - \frac{1}{3}\right] - \left[\frac{e^{3 \cdot x}}{3} - \frac{1}{3}\right] \\
&= -1 + x \cdot e^{3 \cdot x}
\end{aligned}$$

[5] Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = e^{0.001\cdot x^2\cdot y}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit vom Rohstoffpreis $x > 0$ und den Transportkosten $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Rohstoffpreiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Transportkostenelastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 1% erhöht und die Transportkosten um 10% vermindern.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(10,50) = 10 \cdot \frac{f_x'(10,50)}{f(10,50)}$ und $\mathcal{E}_y^f(10,50) = 50 \cdot \frac{f_y'(10,50)}{f(10,50)}$ mit

$$f_x'(x,y) = e^{0.001\cdot x^2\cdot y} \cdot 0.002 \cdot x \cdot y \text{ und } f_y'(x,y) = e^{0.001\cdot x^2\cdot y} \cdot 0.001 \cdot x^2.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (10, 50)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) = 10 \cdot \frac{e^{0.001\cdot 100\cdot 50} \cdot 0.002 \cdot 10 \cdot 50}{e^{0.001\cdot 100\cdot 50}} = 10 \cdot 0.002 \cdot 500 = 10$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) = 50 \cdot \frac{e^{0.001\cdot 100\cdot 50} \cdot 0.001 \cdot 100}{e^{0.001\cdot 100\cdot 50}} = 50 \cdot 0.001 \cdot 100 = 5.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = 10 \cdot 1\% + 5 \cdot (-10)\% = -40\%$

d.h. eine 1% Erhöhung des Rohstoffpreises bei gleichzeitiger 10% Verminderung der Transportkosten führt zu einer ungefähr 40% Verminderung der Herstellungskosten.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + 9 \cdot y + 15 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $3 \cdot x + y = 6$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte)
Hinweis zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = 3 \cdot x + y - 6 \overset{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = x^3 + 9 \cdot y + 15 + \lambda \cdot (3 \cdot x + y - 6)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x,y) = 3 \cdot x^2$ und $f'_y(x,y) = 9$
  - $b'_x(x,y) = 3$ und $b'_y(x,y) = 1$
  - $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) = 9 + \lambda$
  - $L'_\lambda(x,y,\lambda) = b(x,y) = 3 \cdot x + y - 6$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{\begin{array}{rcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3 \cdot x^2 + 3 \cdot \lambda & = & 0 \\ 9 + \lambda & = & 0 \\ 3 \cdot x + y - 6 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3 \cdot x^2 - 27 & = & 0 \\ \lambda & = & -9 \\ 3 \cdot x + y - 6 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & 9 \\ \lambda & = & -9 \\ y & = & 6 - 3 \cdot x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rclcrcl} x & = & -3 & \text{oder} & x & = & 3 \\ \lambda & = & -9 & & & & \\ y & = & 6 - 3 \cdot x & & & & \end{array}\right\}$$

  Also sind die stationären Punkte: $P1 = (-3, 15), P2 = (3, -3)$ mit $\lambda = -9$
- Zur Berechnung der Werte von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0:
  - $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = f''_{yy}(x,y) = 0$
  - $f''_{xx}(x,y) = 6 \cdot x$
  - $b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = b''_{xx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = 0.$
- Berechnung der Werte von (x_0, y_0, λ_0) für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0
  - $D_0(-3, 15, -9) = -18 - 2 \cdot 0 + 0 = -18 < 0 \Rightarrow (-3, 15)$ ist eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $3 \cdot x + y = 6$ mit Funktionswert $f(-3, 15) = 123$.
  - $D_0(3, -3, -9) = 18 - 2 \cdot 0 + 0 = 18 > 0 \Rightarrow (3, -3)$ ist eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $3 \cdot x + y = 6$ mit Funktionswert $f(3, -3) = 15$.