Mathematik für Ökonomen – SS 2017 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 1

01.08.2017, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[3] **(a)** Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y \; - \; 2 \cdot x \; \leq \; 2$

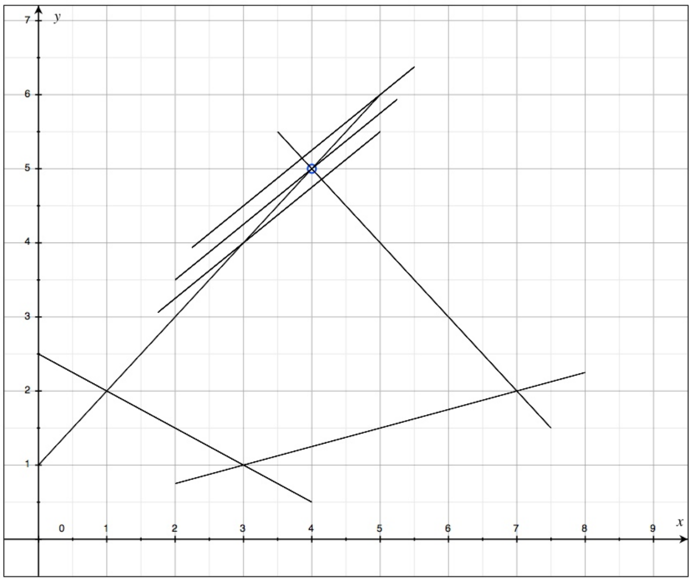
(2) $2 \cdot y \; + \; x \geq \; 5$

(3) $2 \cdot y \; - \frac{1}{2} \cdot x \geq \; \frac{1}{2}$

(4) $y + x \leq 9$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{ (x, y) : y \leq 1 + x \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \text{ und } y \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x \text{ und } y \leq 9 - x \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

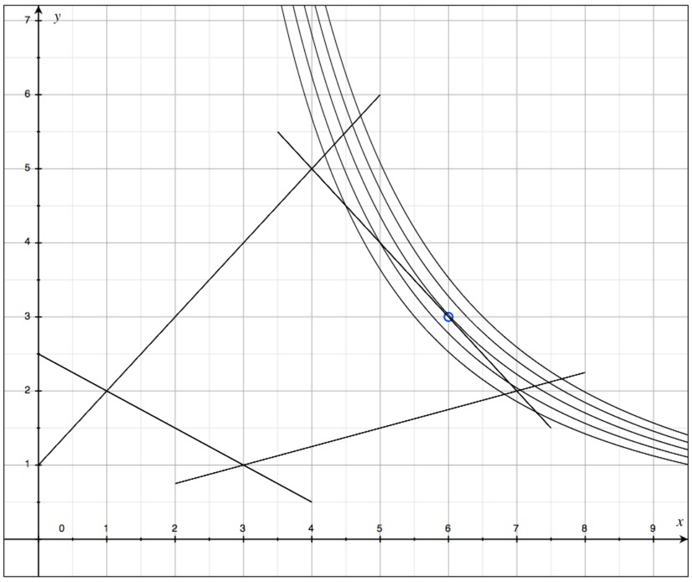
[3] **(b)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = -3x + 4y$ „halbgraphisch“ : Zielgerade mit maximalem z-Wert (und mindestens eine weitere) oben einzeichnen, Maximalstelle(n) (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Ergebniskontrolle:

Zielgeradenschar: $y = \frac{1}{4} \cdot z + \frac{3}{4} \cdot x$, z variabel.
Da $b > 0$ in $z = ax + by$, bedeutet Maximierung von z eine Verschiebung nach oben. Die Maximalstelle (x_0, y_0) ergibt sich als Schnittpunkt der Beschränkungsgeraden (4) $y = 9 - x$ und (1) $y = 1 + x$. Damit ergibt sich x_0 durch Auflösungen der Gleichung $9 - x = 1 + x$. Also $x_0 = 4$. Einsetzen in (4) oder (1) liefert $y_0 = 5$. Die Maximalstelle $(x_0 = 4, y_0 = 5)$ eingesetzt in die Zielfunktion ergibt den Maximalwert $z_0 = 8$.

[4] **(c)** Maximieren Sie bezüglich dieser Lösungsmenge L die Zielfunktion $z = x^2 y$
„halbgraphisch“ : Relevante Beschränkung und relevante Kurve zum maximalem z-Wert hervorheben, Maximalstelle (x_0, y_0) markieren. Maximalstelle (x_0, y_0) und Maximalwert z_0 rechnerisch bestimmen.

Bitte übertragen Sie die Lösungsmenge L aus (a) korrekt in das folgende Diagramm.



(Ersatzvorlage siehe Anhang)
Ergebniskontrolle:

Optisch ergibt sich (1) als relevante Beschränkungsgerade. Berührung im “Innern” des Geradenstücks, also Tangentiallösung.
Zur Berechnung der Tangentiallösung:

a) Einsetzen von (4) $y = 9 - x$ in die Zielfunktion: $z = f(x) = x^2 \cdot (9 - x) = 9 \cdot x^2 - x^3$.

b) $f'(x) = 18 \cdot x - 3 \cdot x^2$

c) $f'(x)$ gleich 0 setzen und nach x auflösen, liefert $x_0 = 6$ (beachte $x \neq 0$). Einsetzen in die Beschränkungsgerade ergibt $y_0 = 3$.

d) Maximalwert: $z_0 = x_0^2 \cdot y_0 = 36 \cdot 3 = 108$.

[4] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot n^5 \;-\; 7\cdot n^3 \;+1}{6\cdot n^5 \;+4\cdot n^2 \;-\; 17\cdot n} = ?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=3}^{n} \dfrac{5^{k-3}}{6^{k-2}} = ?$

Untere Summengrenze beachtet?

Ergebniskontrolle:

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot n^5 \;-\; 7\cdot n^3 \;+1}{6\cdot n^5 \;+4\cdot n^2 \;-\; 17\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\cdot(3-7\cdot n^{-2}+n^{-5})}{n^5\cdot(6+4\cdot n^{-3}-17\cdot n^{-4})}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3-7\cdot n^{-2}+n^{-5}}{6+4\cdot n^{-3}-17\cdot n^{-4}} = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{5^{k-3}}{6^{k-2}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-3} \frac{5^{k}}{6^{k+1}} = \tfrac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{6^k} = \tfrac{1}{6}\cdot \tfrac{1}{1-5/6} = 1.$$

[6] Eine endliche Folge von wöchentlichen Zahlungen $a_i, i = 1, \ldots, n$, die um den konstanten Geldbetrag $|d|$ abnehmen, soll sich in n Wochen zu einem Wert s_n aufsummieren.

(a) Wie errechnen sich die n-te Zahlung a_n und die Summe s_n basierend auf d, n und dem Anfangswert a_1?

(b) $n = 11$ und $|d| = 8$ (also $d = -8$) werden festgelegt. Welchen Wert muss die erste Zahlung a_1 haben, damit das Summenziel $s_n = 550$ mit der letzten Zahlung a_{11} genau erreicht wird? Wie hoch ist dann die letzte Zahlung a_{11}?

(c) Seien $a_1 = 92$ und $|d| = 8$ (also $d = -8$) festgelegt. Welchen Wert muss die Anzahl n haben, um das Summenziel $s_n = 252$ genau zu erreichen, wobei *keine negativen Zahlungen* a_i zugelassen sein sollen.

Ergebniskontrolle:

(a) $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ [arithm. Folge] und $s_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$ [arithm. Summe].

(b) $550 = 11 \cdot a_1 - \frac{11 \cdot 10}{2} \cdot 8 \Rightarrow 990 = 11 \cdot a_1 \Rightarrow 90 = a_1$.

$a_{11} = 90 - 10 \cdot 8 = 10$.

(c) $252 = n \cdot 92 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-8) = 96 \cdot n - 4 \cdot n^2$

$n^2 - 24 \cdot n + 63 \overset{!}{=} 0$, mit den Lösungen $n \in \{12 - 9, 12 + 9\} = \{3, 21\}$.

Wir haben $a_3 = 92 + 2 \cdot (-8) = 76 > 0$ und $a_{21} = 92 + 20 \cdot (-8) = -68 < 0$.

Also entfällt Lösung $n = 21$, da negative Zahlungen nicht zugelassen sind, d.h. $n = 3$.

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

(a) $(C \cdot B) + A$

(b) $(C^T)^{-1}$

Ergebniskontrolle:

(a) $C \cdot B = \begin{pmatrix} 40 & 15 & 20 \\ 29 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $(C \cdot B) + A = \begin{pmatrix} 42 & 15 & 21 \\ 29 & 5 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$.

(b) C^T ist eine 3×2-Matrix, also insbesondere keine quadratische Matrix. Daher ist $(C^T)^{-1}$ nicht definiert.

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	4	2	2
	Z_2	6	4	8
	Z_3	2	2	4

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	1	3	2
	R_2	3	2	3

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (3, 2)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 18 & 34 \\ 30 & 20 & 34 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 140 \\ 154 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (3, 2) \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 154 \end{pmatrix} = 728$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 8$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_8 um 125% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 5\%$ und ein Zielwert K_x, der 125% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n <u>erstmals</u> die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $125\%, 50\%, 0\%, 50\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $2.25^{\frac{1}{8}} \approx 1.11$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.05 \approx 0.05$, $15^4 = 50625$, $\ln 2.25 \approx 0.81$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_8 = 2.25 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^8 \Leftrightarrow 1 + i = (2.25)^{\frac{1}{8}} \approx 1.11 \Leftrightarrow i = 0.11 = 11\%$

(b) $K_x = 2.25 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.05)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2.25)}{\ln(1.05)} \approx \frac{0.81}{0.05} = \frac{81}{5}$; $n = \lceil x \rceil = 17$

(c) $K_4 = (2.25 \cdot 1.5 \cdot 1 \cdot 1.5) \cdot 10000 = 225 \cdot 15 \cdot 15 = 15^4 = 50625$

$i_{\text{eff}} = (2.25 \cdot 1.5 \cdot 1 \cdot 1.5)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(1.5^4\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1.5 - 1 = 0.5 = 50\%$

[5] Bestimmen Sie die x-Lösungsmenge von:

$$\ln\left((1+x)^2+1\right) < \ln 10$$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\ln\left((1+x)^2+1\right) < \ln 10 \quad &\Leftrightarrow \quad (1+x)^2+1 < 10 \\
&\Leftrightarrow \quad (1+x)^2 < 9 \\
&\Leftrightarrow \quad |1+x|^2 < 9 \\
&\Leftrightarrow \quad |1+x| < 3 \\
&\Leftrightarrow \quad 1+x > -3 \quad \text{und} \quad 1+x < 3 \\
&\Leftrightarrow \quad x > -4 \quad \text{und} \quad x < 2
\end{aligned}$$

Also Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : x > -4 \text{ und } x < 2\} \ = \,]-4, 2[.$$

[4] Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	e_4	Protokoll
2	0	0	0	1	0	0	0	I
0	1	1	1	0	1	0	0	II
0	-1	3	-1	0	0	1	0	III
0	-2	2	1	0	0	0	1	IV
1	0	0	0	1/2	0	0	0	(1/2)· I
0	1	1	1	0	1	0	0	II
0	-1	3	-1	0	0	1	0	III
0	-2	2	1	0	0	0	1	IV
1	0	0	0	1/2	0	0	0	I
0	1	1	1	0	1	0	0	II
0	0	4	0	0	1	1	0	III + II
0	0	4	3	0	2	0	1	IV + 2· II
1	0	0	0	1/2	0	0	0	I
0	1	1	1	0	1	0	0	II
0	0	1	0	0	1/4	1/4	0	(1/4)· III
0	0	4	3	0	2	0	1	IV
1	0	0	0	1/2	0	0	0	I
0	1	0	1	0	3/4	-1/4	0	II - III
0	0	1	0	0	1/4	1/4	0	III
0	0	0	3	0	1	-1	1	IV - 4· III
1	0	0	0	1/2	0	0	0	I
0	1	0	1	0	3/4	-1/4	0	II
0	0	1	0	0	1/4	1/4	0	III
0	0	0	1	0	1/3	-1/3	1/3	(1/3)· IV
1	0	0	0	1/2	0	0	0	I
0	1	0	0	0	5/12	1/12	-1/3	II - IV
0	0	1	0	0	1/4	1/4	0	III
0	0	0	1	0	1/3	-1/3	1/3	IV

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/12 & 1/12 & -1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & 4 \end{array} \quad \overset{\text{Gauß-Jordan}}{\longrightarrow \ldots \longrightarrow} \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[5] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 1 & 10 & 12 \\ 1 & 8 & 8 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus den Rang der Matrix A.

(ii) Welchen Rang besitzt die Matrix $(A^T)^T$? (mit Begründung bitte)

Ergebniskontrolle:

(a) Beim LGS $Ax = b$ ist 1 Variable frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & -1 & - & x_4 \\ x_2 & = & x_4 & - & 4 \\ x_3 & = & 1 & - & x_4 \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & \end{array} \right\}$$

(b) zu (i):

Der Rang der Matrix A kann aus dem Endtableau des GJ-Algorithmus zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ abgelesen werden.

x_1	x_2	x_3	b	Protokoll
1	8	8	0	I
1	10	12	0	II
1	8	8	0	III
1	6	4	0	IV
1	8	8	0	I
0	2	4	0	II - I
0	0	0	0	III - I
0	-2	-4	0	IV - I
1	8	8	0	I
0	1	2	0	(1/2)·II
0	0	0	0	III
0	-2	-4	0	IV
1	0	-8	0	I - 8· II
0	1	2	0	II
0	0	0	0	III
0	0	0	0	IV + 2· II

Also besitzt Matrix A den Rang 2.

zu (ii):

$(A^T)^T = A$. Daher besitzt die Matrix $(A^T)^T$ denselben Rang wie die Matrix A, d.h. sie besitzt nach (i) den Rang 2.