Mathematik für Ökonomen – SS 2017 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik 2

01.08.2017, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **9 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[6] Die folgende Funktion f ist aus stetigen Stücken zusammengesetzt.
Legen Sie die Werte der Zahlen α, β rechnerisch so fest, dass die Funktion an der „Nahtstelle“ $x_0 = 1$ *stetig* wird:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot e^{(x+\alpha)^2-4} & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ \beta & \text{für} \quad x = 1 \\ 2 \cdot \ln(e - 1 + x^3) & \text{für} \quad 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 = 1$: $\lim\limits_{x \to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_-} 2 \cdot e^{(x+\alpha)^2-4} = 2 \cdot e^{(1+\alpha)^2-4}$

RGW in $x_0 = 1$: $\lim\limits_{x \to 1_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_+} 2 \cdot \ln(e - 1 + x^3) = 2 \cdot \ln e = 2 \cdot 1 = 2$

Wegen Stetigkeit von f in $x_0 = 1$ muß gelten

$$\beta = f(1) \stackrel{!}{=} \lim_{x \to 1_-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \to 1_+} f(x).$$

Dies führt zu den Gleichungen

$$2 \cdot e^{(1+\alpha)^2-4} = \beta \quad \text{und} \quad \beta = 2.$$

Schließlich

$$\begin{aligned} 2 \cdot e^{(1+\alpha)^2-4} = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{(1+\alpha)^2-4} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad (1+\alpha)^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (1+\alpha)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + \alpha = -2 \quad \text{oder} \quad 1 + \alpha = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = -3 \quad \text{oder} \quad \alpha = 1 \end{aligned}$$

Also für $\alpha = -3, \beta = 2$ und für $\alpha = 1, \beta = 2$ ist f an der Nahtstelle $x_0 = 1$ stetig.

Gegeben $f(x) = 2{\cdot}(x{+}1)^2{\cdot}\ln(x{+}1){-}(x{+}1)^2$ mit $D(f) = [-4/5, 5]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = 4 \cdot (x+1) \cdot \ln(x+1)$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximalpunkte (Maximalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \;&\Leftrightarrow\; 4 \cdot (x+1) \cdot \ln(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; 4 \cdot (x+1) = 0 \text{ oder } \ln(1+x) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; x+1 = 0 \text{ oder } 1+x = e^0 \\ &\Leftrightarrow\; x = -1 \text{ oder } x = 0 \end{aligned}$$

$-1 \notin D(f), 0 \in D(f)$, also $x = 0$ einzige stationäre Stelle

$f''(x) = 4 \cdot \ln(x+1) + 4.$

$f''(0) = 4 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$

Also ist $x = 0$ eine lokale Minimalstelle mit $f(0) = 2 \cdot 1^2 \cdot 0 - 1^2 = -1$.

[3](b) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkten).
Hinweis: $1/5 < e^{-1} < 1$

Ergebniskontrolle:

Untersuchung auf Vorzeichenbereiche von $f''(x)$. Dazu zunächst Bestimmung der Nullstellen von $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \ln(x+1) + 4 = 0 \;&\Leftrightarrow\; \ln(x+1) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow\; \ln(x+1) = -1 \\ &\Leftrightarrow\; x+1 = e^{-1} \\ &\Leftrightarrow\; x = e^{-1} - 1. \end{aligned}$$

Nach Hinweis: $e^{-1} - 1 > 1/5 - 1 = -4/5$ und $e^{-1} - 1 < 1 - 1 = 0$, also $e^{-1} - 1 \in D(f)$

Nun Untersuchung auf Vorzeichenbereiche von $f''(x)$ mit 3.Ableitung

$f'''(x) = 4/(x+1)$

$f'''(e^1 - 1) = 4/e^{-1} = 4 \cdot e^1 > 0$

Daher

$f''(x) \le 0$ für $x \in [-4/5, e^{-1} - 1]$, d.h. f konkav über $[-4/5, e^{-1} - 1]$,

$f''(x) \ge 0$ für $x \in [e^{-1} - 1, 5]$, d.h. f konvex über $[e^{-1} - 1, 5]$.

Außerdem besitzt f in $x = e^{-1} - 1$ eine Wendestelle mit Funktionswert

$$f(e^1 - 1) = 2 \cdot (e^{-1})^2 \cdot \ln(e^{-1}) - (e^{-1})^2 = 2 \cdot e^{-2} - e^{-2} = e^{-2}.$$

[5] Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cdot e^x + x^3 - x^2 - 2\cdot x - 2}{e^{x^3}-1}$ mit der L'Hospital-Regel (andere Lösungswege werden nicht bewertet).

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2\cdot e^x + x^3 - x^2 - 2\cdot x - 2}{e^{x^3}-1} &\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot e^x + 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 2}{3\cdot x^2\cdot e^{x^3}} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot e^x + 6\cdot x - 2}{6\cdot x\cdot e^{x^3} + 9\cdot x^4\cdot e^{x^3}} \\
&\overset{\text{LHR}\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot e^x + 6}{6\cdot e^{x^3} + 18\cdot x^3\cdot e^{x^3} + 36\cdot x^3\cdot e^{x^3} + 27\cdot x^6\cdot e^{x^3}} \\
&= \frac{2\cdot e^0 + 6}{6\cdot e^0 + 0 + 0 + 0} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

[5] Berechnen Sie das Integral $\int_{-1/2}^{e^2} f(t)\;dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} e^{1+2\cdot t} & \text{für } \; -1/2 \leq t < 0 \\ 3\cdot t^5 & \text{für } \; 0 \leq t \leq 1 \\ 2/t & \text{für } \; 1 \leq t \leq e^2 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}
\int_{-1/2}^{e^2} f(t)dt &= \int_{-1/2}^{0} e^{1+2\cdot t}\;dt + \int_0^1 3\cdot t^5\;dt + \int_1^{e^2} \frac{2}{t}\;dt \\
&= \int_{-1/2}^{0} e^{1+2\cdot t}\;dt + 3\cdot \int_0^1 t^5\;dt + 2\cdot \int_1^{e^2} \frac{1}{t}\;dt \\
&= \left[e^{1+2\cdot t}/2\right]_{-1/2}^{0} + 3\cdot \left[t^6/6\right]_0^1 + 2\cdot [\ln t]_1^{e^2} \\
&= \left[e^1/2 - e^0/2\right] + 3\cdot \left[1^3/6 + 0\right] + 2\cdot \left[\ln e^2 - 0\right] \\
&= e^1/2 - 1/2 + 1/2 + 2\cdot 2 = e^1/2 + 4
\end{aligned}$$

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(0) + \int_0^x (3 \cdot t + 1) \cdot e^{3 \cdot t} \; dt$, wobei $F(0)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(0) = -1$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:

Mit $f(t) = 3 \cdot t + 1$, $g'(t) = e^{3 \cdot t}$ ist $f'(t) = 3$ und $g(t) = \frac{e^{3 \cdot t}}{3}$.

$$\begin{aligned}
F(x) &= -1 + \int\limits_0^x (3 \cdot t + 1) \cdot e^{3 \cdot t} \; dt \\
&= -1 + \left[\frac{3 \cdot t + 1}{3} \cdot e^{3 \cdot t} \right]_0^x - \int_0^x e^{3 \cdot t} \; dt \\
&= -1 + \left[\frac{3 \cdot x + 1}{3} \cdot e^{3 \cdot x} - \frac{1}{3} \right] - \left[\frac{e^{3 \cdot t}}{3} \right]_0^x \\
&= -1 + \left[\frac{3 \cdot x + 1}{3} \cdot e^{3 \cdot x} - \frac{1}{3} \right] - \left[\frac{e^{3 \cdot x}}{3} - \frac{1}{3} \right] \\
&= -1 + x \cdot e^{3 \cdot x}
\end{aligned}$$

[5] Bestimmen Sie die quadratische Approximation (Taylorpolynom vom Grad n = 2) der Funktion $f(x) = e^{x^2+x}$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und damit eine Näherung für den Funktionswert $f(1) = e^2$.

Ergebniskontrolle:

$f(0) = 1$; $f'(x) = (2 \cdot x + 1) \cdot e^{x^2+x}$; $f'(0) = 1$; $f''(x) = 2 \cdot e^{x^2+x} + (2 \cdot x + 1)^2 \cdot e^{x^2+x}$; $f''(0) = 2 + 1 = 3$;

$T_2^f(x; 0) := f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x - 0)^1 + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - 0)^2 = 1 + x + \frac{3}{2} \cdot x^2$.

Damit ist $f(1) \approx T_2^f(1, 0) = 1 + 1 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

[5] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = (1+y^2)^2 \cdot e^{1-x}$ $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy} und f''_{xy} (oder f''_{yx}).

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x,y) = -(1+y^2)^2 \cdot e^{1-x}$$

$$f'_{xx}(x,y) = (1+y^2)^2 \cdot e^{1-x}$$

$$f'_y(x,y) = 2 \cdot (1+y^2) \cdot 2 \cdot y \cdot e^{1-x} = 4 \cdot (y+y^3) \cdot e^{1-x}$$

$$f''_{yy}(x,y) = 4 \cdot (1+3 \cdot y^2) \cdot e^{1-x}$$

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -4 \cdot (y+y^3) \cdot e^{1-x}$$

[5] Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = e^{0.001\cdot x^2\cdot y}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit vom Rohstoffpreis $x > 0$ und den Transportkosten $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Rohstoffpreiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Transportkostenelastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 1% erhöht und die Transportkosten um 10% vermindern.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(10,50) = 10 \cdot \frac{f'_x(10,50)}{f(10,50)}$ und $\mathcal{E}_y^f(10,50) = 50 \cdot \frac{f'_y(10,50)}{f(10,50)}$ mit

$$f'_x(x,y) = e^{0.001\cdot x^2\cdot y} \cdot 0.002 \cdot x \cdot y \text{ und } f'_y(x,y) = e^{0.001\cdot x^2\cdot y} \cdot 0.001 \cdot x^2.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (10, 50)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) = 10 \cdot \frac{e^{0.001\cdot 100\cdot 50} \cdot 0.002 \cdot 10 \cdot 50}{e^{0.001\cdot 100\cdot 50}} = 10 \cdot 0.002 \cdot 500 = 10$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) = 50 \cdot \frac{e^{0.001\cdot 100\cdot 50} \cdot 0.001 \cdot 100}{e^{0.001\cdot 100\cdot 50}} = 50 \cdot 0.001 \cdot 100 = 5.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = 10 \cdot 1\% + 5 \cdot (-10)\% = -40\%$

d.h. eine 1% Erhöhung des Rohstoffpreises bei gleichzeitiger 10% Verminderung der Transportkosten führt zu einer ungefähr 40% Verminderung der Herstellungskosten.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^3 + 9 \cdot y + 15 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $3 \cdot x + y = 6$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte)
Hinweis zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = 3 \cdot x + y - 6 \overset{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = x^3 + 9 \cdot y + 15 + \lambda \cdot (3 \cdot x + y - 6)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x,y) = 3 \cdot x^2$ und $f'_y(x,y) = 9$
  - $b'_x(x,y) = 3$ und $b'_y(x,y) = 1$
  - $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) = 9 + \lambda$
  - $L'_\lambda(x,y,\lambda) = b(x,y) = 3 \cdot x + y - 6$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{\begin{array}{lcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 3 \cdot x^2 + 3 \cdot \lambda & = & 0 \\ 9 + \lambda & = & 0 \\ 3 \cdot x + y - 6 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 3 \cdot x^2 - 27 & = & 0 \\ \lambda & = & -9 \\ 3 \cdot x + y - 6 & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x^2 & = & 9 \\ \lambda & = & -9 \\ y & = & 6 - 3 \cdot x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & -3 & \text{oder} & x & = & 3 \\ \lambda & = & -9 & & & & \\ y & = & 6 - 3 \cdot x & & & & \end{array}\right\}$$

  Also sind die stationären Punkte: $P1 = (-3, 15), P2 = (3, -3)$ mit $\lambda = -9$

- Zur Berechnung der Werte von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0:
  - $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = f''_{yy}(x,y) = 0$
  - $f''_{xx}(x,y) = 6 \cdot x$
  - $b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = b''_{xx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = 0.$
- Berechnung der Werte von (x_0, y_0, λ_0) für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0
  - $D_0(-3, 15, -9) = -18 - 2 \cdot 0 + 0 = -18 < 0 \Rightarrow (-3, 15)$ ist eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $3 \cdot x + y = 6$ mit Funktionswert $f(-3, 15) = 123$.
  - $D_0(3, -3, -9) = 18 - 2 \cdot 0 + 0 = 18 > 0 \Rightarrow (3, -3)$ ist eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $3 \cdot x + y = 6$ mit Funktionswert $f(3, -3) = 15$.