Mathematik für Ökonomen – SS 2018 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. R. Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

24.07.2018, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $-\frac{1}{3} \cdot y \; - \; \frac{1}{3} \cdot x \geq \; -3$

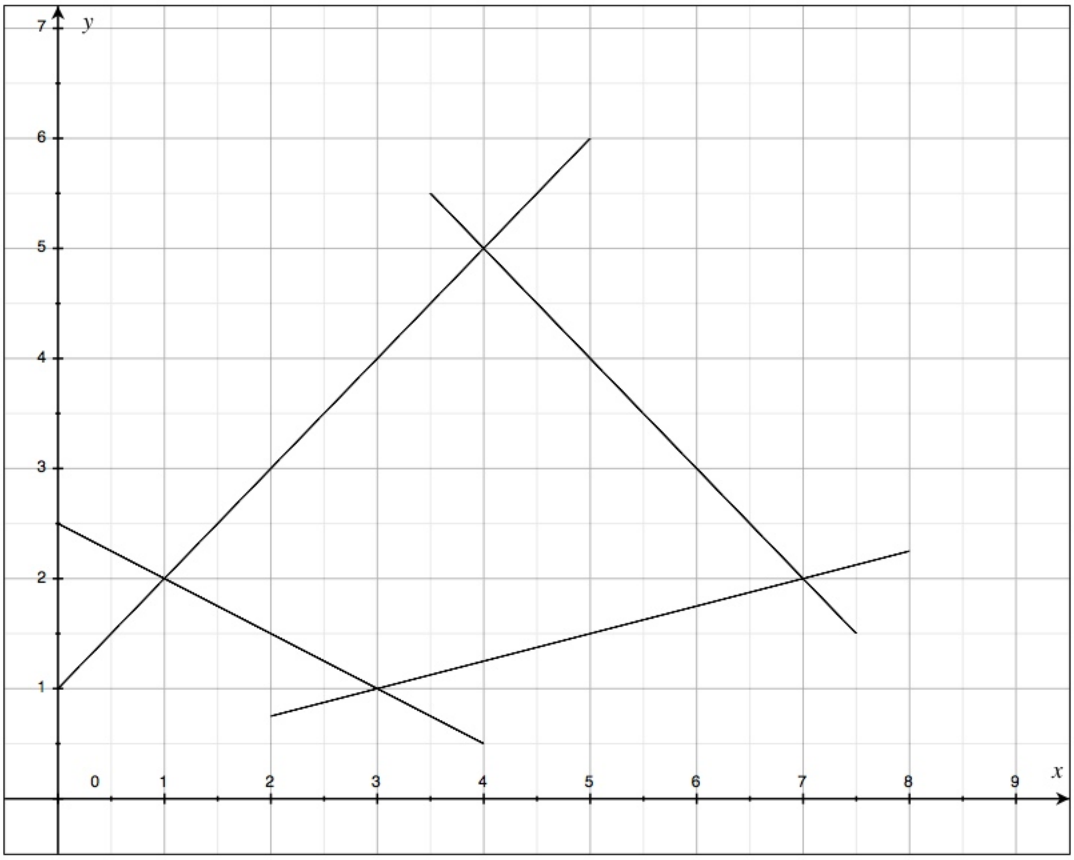
(2) $y \; - x \leq \; 1$

(3) $2 \cdot y \; - \; \frac{1}{2} \cdot x \; \geq \; \frac{1}{2}$

(4) $\frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{4} \cdot x \geq \frac{5}{4}$

Ergebniskontrolle:

$$\text{L} = \left\{ (x, y) : y \leq 9 - x \text{ und } y \leq 1 + x \text{ und } y \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	1	3	2
	Z_2	3	2	3
	Z_3	2	8	4

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	4	6	2
	R_2	2	4	2

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 3)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 40 & 34 \\ 18 & 30 & 24 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 206 \\ 150 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 206 \\ 150 \end{pmatrix} = 862$

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 9 & 0 \\ 7 & 8 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 12 & 0 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|r} x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[4] (b) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der <u>Methode</u> - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

(a) Lösungsmenge

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/9 \\ -1/9 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) **Ansatz:** Tabellenform

x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	e_4	Protokoll
1/2	0	0	0	1	0	0	0	I
0	1	2	3	0	1	0	0	II
0	4	5	9	0	0	1	0	III
0	7	8	6	0	0	0	1	IV

Lösung: Nach Anwendung des Gauß-Jordan Algorithmus

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 13/9 & -5/9 & 1/9 \\ 0 & -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_4 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 20\%$ und ein Zielwert K_x, der 50% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $21\%, 10\%, 0\%, 10\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{4}} \approx 1.11$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $\ln 1.5 \approx 0.44$, $121^2 = 14641$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_4 = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^4 \Leftrightarrow 1 + i = (1.5)^{\frac{1}{4}} \approx 1.11 \Leftrightarrow i = 0.11 = 11\%$

(b) $K_x = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.2)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.5)}{\ln(1.2)} \approx \frac{0.44}{0.18} = \frac{44}{18}$; $n = \lceil x \rceil = 3$

(c) $K_4 = (1.21 \cdot 1.1 \cdot 1 \cdot 1.1) \cdot 10000 = 121 \cdot 11 \cdot 11 = 121^2 = 14641$

$i_{\text{eff}} = (1.21 \cdot 1.1 \cdot 1 \cdot 1.1)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(1.1^4\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1.1 - 1 = 0.1 = 10\%$

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion f an der „Nahtstelle“ $x_0 = 0$ *stetig* ist:

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(e^3 + x\right) & \text{für} \quad -1 \leq x < 0 \\ 3 & \text{für} \quad x = 0 \\ 3 \cdot e^{1+x} & \text{für} \quad 0 < x \leq 5 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 = 0$: $\lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = \cdots = 3$

RGW in $x_0 = 0$: $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = \cdots = 3 \cdot e^1$

FW in x_0 =0: $f(0) = 3$

$e^1 \neq 1$, also $3 \cdot e^1 \neq 3$, d.h. LGW $\neq$ RGW. Daher ist f nicht stetig in $x_0 = 0$.

Gegeben $f(x) = e^{1-x} \cdot x^2 - 1$ mit $D(f) = [-1, 1]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = -e^{1-x} \cdot \big(x^2 - 2 \cdot x\big)$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2.$$

$0 \in D(f)$, $2 \notin D(f)$, also $x = 0$ einzige stationäre Stelle.

$$f''(x) = \cdots = e^{1-x} \cdot \big(x^2 - 4 \cdot x + 2\big)$$

$f''(0) = \cdots = 2 \cdot e^1 > 0$, also $x = 0$ lokale Minimalstelle mit $f(0) = -1$

[3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(-1) = -1 + e^2 > 0$ und $f(1) = -1 + 1 = 0$, außerdem $(0, -1)$ einzige lokale Extremstelle, daher

-1 minimaler Wert von $f(-1), f(0), f(1)$, also $(0, -1)$ globaler Minimalpunkt
$-1+e^2$ maximaler Wert von $f(-1), f(0), f(1)$, also $(-1, -1+e^2)$ globaler Maximalpunkt

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{e^2} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 4 \cdot e^{4 \cdot t} + 3 \cdot t^2 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 1/t & \text{für } 1 \leq t \leq e^2 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned} \int_0^{e^2} f(t)dt &= \int_0^1 \left(4 \cdot e^{4 \cdot t} + 3 \cdot t^2\right)\ dt + \int_1^{e^2} 1/t\ dt \\ &= \cdots = 4 \cdot \left[e^{4 \cdot t}/4\right]_0^1 + 3 \cdot \left[t^3/3\right]_0^1 + [\ln(t)]_1^{e^2} = \cdots = e^4 + 2 \end{aligned}$$

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x \frac{1}{t^3} \cdot \ln(t)\, dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = -\frac{1}{4}$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:
Mit $f(t) = \ln(t)$, $g'(t) = \frac{1}{t^3}$ ist $f'(t) = 1/t$ und $g(t) = -\frac{1}{2 \cdot t^2}$.

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{4} + \int\limits_1^x \frac{1}{t^3} \cdot \ln(t)\, dt \\ &= -\frac{1}{4} + \left[-\frac{1}{2 \cdot t^2} \cdot \ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{2 \cdot t^2} \cdot \frac{1}{t}\right)\, dt = \cdots = -\frac{\ln(x)}{2 \cdot x^2} - \frac{1}{4 \cdot x^2} \end{aligned}$$

[5] Betrachten Sie die die Produktionsfunktion $f(x,y) = 100 \cdot x^{1/5} \cdot y^{4/5}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$.Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Kapitalelastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Arbeitselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Kapitaleinsatz um 10% erhöht und der Arbeitseinsatz um 5% vermindert.

Ergebniskontrolle:

(a) An der Basisstelle $(x_0, y_0) = (10, 50)$ gilt

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 10 \cdot \frac{20 \cdot 10^{-4/5} \cdot 50^{4/5}}{100 \cdot 10^{1/5} \cdot 50^{4/5}} = 10 \cdot \frac{10^{-4/5}}{5 \cdot 10^{1/5}} = 1/5$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 50 \cdot \frac{80 \cdot 10^{1/5} \cdot 50^{-1/5}}{100 \cdot 10^{1/5} \cdot 50^{4/5}} = 50 \cdot \frac{4 \cdot 50^{-1/5}}{5 \cdot 50^{4/5}} = 4/5.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = \frac{1}{5} \cdot 10\% + \frac{4}{5} \cdot (-5)\% = -2\%$

d.h. eine 10% Erhöhung des Kapitaleinsatzes bei gleichzeitiger 5% Verminderung des Arbeitseinsatzes führt zu einer ungefähr 2% Verminderung des Produktionsoutputs.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 - 6 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot y^3 + 5 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle:

Bestimmung der stationären Punkte:
Gesucht Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} f'_x(x,y) & = & 0 \\ f'_y(x,y) & = & 0 \end{array}$$

Als stationäre Punkte erhält man: $P1 = (-2,-2), P2 = (-2,2), P3 = (0,-2), P4 = (0,2)$.

Berechnung der Werte $H_D(x_0, y_0)$ der Hesse-Determinante für jeden stationären Punkt (x_0, y_0)

- $H_D(-2,-2) = (-6+3) \cdot (-6) = 18 > 0$ und $f''_{xx}(-2,-2) = -3 < 0 \Rightarrow (-2,-2)$ ist eine Maximalstelle von f mit Funktionswert $f(-2,-2) = -8/2 + 3 \cdot 4/2 - 6 \cdot (-2) - 8/2 + 5 = 15$.
- $H_D(-2,2) = (-6+3) \cdot 6 = -18 < 0 \Rightarrow (-2,2)$ ist eine Sattelpunktstelle von f mit Funktionswert $f(-2,2) = -8/2 + 3 \cdot 4/2 - 6 \cdot 2 + 8/2 + 5 = -1$.
- $H_D(0,-2) = 3 \cdot (-6) = -18 < 0 \Rightarrow (0,-2)$ ist eine Sattelpunktstelle mit Funktionswert $f(0,-2) = -6 \cdot (-2) - 8/2 + 5 = 13$.
- $H_D(0,2) = 3 \cdot 6 = 16 > 0$ und $f''_{xx}(0,2) = 3 > 0 \Rightarrow (0,2)$ ist eine Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(0,2) = -6 \cdot 2 + 8/2 + 5 = -3$.