

Mathematik für Ökonomen – SS 2018 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. R. Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

24.07.2018, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe
kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum _____

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift _____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

Einträge der Klausuraufsicht:

Unterbrechungen

Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

Aufgabe 1

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

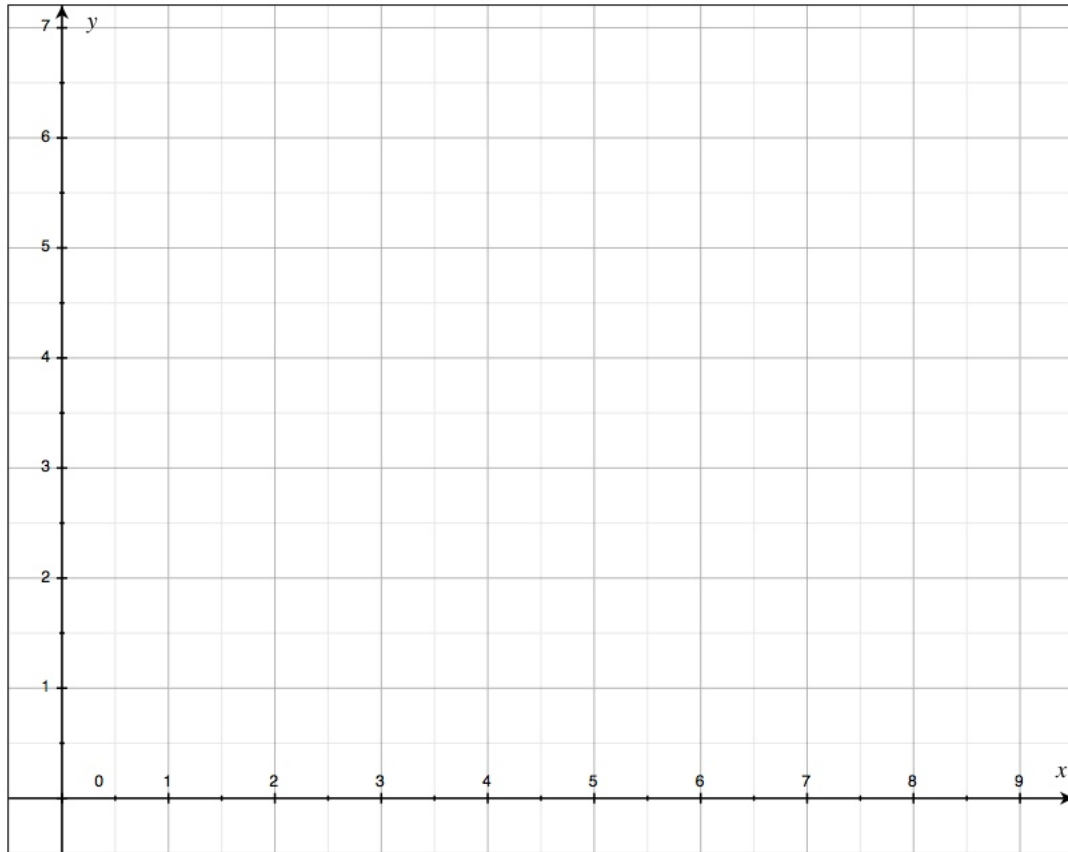
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $-\frac{1}{3} \cdot y - \frac{1}{3} \cdot x \geq -3$

(2) $y - x \leq 1$

(3) $2 \cdot y - \frac{1}{2} \cdot x \geq \frac{1}{2}$

(4) $\frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{4} \cdot x \geq \frac{5}{4}$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Aufgabe 2

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

- [4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte					Zwischenprodukte		
		E_1	E_2	E_3			Z_1	Z_2	Z_3
Zwischenprodukte	Z_1	1	3	2	Rohstoffe	R_1	4	6	2
	Z_2	3	2	3		R_2	2	4	2
	Z_3	2	8	4					

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 3)$.

- (a) Berechnen Sie M_{RE} , die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

- (b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Aufgabe 3

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

- [2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 9 & 0 \\ 7 & 8 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 12 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan} \dots} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- [4] (b) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

- [2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_4 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?
- [2] (b) Gegeben: $i = 20\%$ und ein Zielwert K_x , der 50% über dem Anfangswert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n -ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)
- [2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel 21%, 10%, 0%, 10%. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff} .

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{4}} \approx 1.11$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $\ln 1.5 \approx 0.44$, $121^2 = 14641$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Aufgabe 5

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion f an der „Nahtstelle“ $x_0 = 0$ *stetig* ist:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e^3 + x) & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 3 & \text{für } x = 0 \\ 3 \cdot e^{1+x} & \text{für } 0 < x \leq 5 \end{cases}$$

Aufgabe 6

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Gegeben $f(x) = e^{1-x} \cdot x^2 - 1$ mit $D(f) = [-1, 1]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!

f hat die Ableitung $f'(x) = -e^{1-x} \cdot (x^2 - 2 \cdot x)$.

- [3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.
- [3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Aufgabe 7

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{e^2} f(t) dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 4 \cdot e^{4t} + 3 \cdot t^2 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 1/t & \text{für } 1 \leq t \leq e^2 \end{cases}$

Aufgabe 8 Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x \frac{1}{t^3} \cdot \ln(t) dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = -\frac{1}{4}$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

[5] Betrachten Sie die die Produktionsfunktion $f(x, y) = 100 \cdot x^{1/5} \cdot y^{4/5}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Kapitalelastizität \mathcal{E}_x^f und die Arbeitselastizität \mathcal{E}_y^f an der obigen Basisstelle.
- (b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Kapitaleinsatz um 10% erhöht und der Arbeitseinsatz um 5% vermindert.

Ergebniskontrolle:

- (a) $\mathcal{E}_x^f(10, 50) = 10 \cdot \frac{f'_x(10,50)}{f(10,50)}$ und $\mathcal{E}_y^f(10, 50) = 50 \cdot \frac{f'_y(10,50)}{f(10,50)}$ mit

$$f'_x(x, y) = 20 \cdot x^{-4/5} \cdot y^{4/5} \text{ und } f'_y(x, y) = 80 \cdot x^{1/5} \cdot y^{-1/5}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (10, 50)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 10 \cdot \frac{20 \cdot 10^{-4/5} \cdot 50^{4/5}}{100 \cdot 10^{1/5} \cdot 50^{4/5}} = 10 \cdot \frac{10^{-4/5}}{5 \cdot 10^{1/5}} = 1/5$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 50 \cdot \frac{80 \cdot 10^{1/5} \cdot 50^{-1/5}}{100 \cdot 10^{1/5} \cdot 50^{4/5}} = 50 \cdot \frac{4 \cdot 50^{-1/5}}{5 \cdot 50^{4/5}} = 4/5.$$

- (b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = \frac{1}{5} \cdot 10\% + \frac{4}{5} \cdot (-5)\% = -2\%$

d.h. eine 10% Erhöhung des Kapitaleinsatzes bei gleichzeitiger 5% Verminderung des Arbeitseinsatzes führt zu einer ungefähr 2% Verminderung des Produktionsoutputs.

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 - 6 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot y^3 + 5 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.

(Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelpunktstellen und die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x, y) = \frac{3}{2} \cdot x^2 + 3 \cdot x$$

$$f'_y(x, y) = -6 + \frac{3}{2} \cdot y^2$$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \cdot x^2 + 3 \cdot x = 0 \\ -6 + \frac{3}{2} \cdot y^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} \cdot x \cdot (x + 2) = 0 \\ y^2 = 4 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -2 \\ y = -2 \quad \text{oder} \quad y = 2 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Also sind die stationären Punkte: $P1 = (-2, -2)$, $P2 = (-2, 2)$, $P3 = (0, -2)$, $P4 = (0, 2)$.

Zur Berechnung der Werte von $H_D(x, y) = f''_{xx}(x, y) \cdot f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) :

$$f''_{xx}(x, y) = 3 \cdot x + 3$$

$$f''_{yy}(x, y) = 3 \cdot y$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 0$$

- $H_D(-2, -2) = (-6 + 3) \cdot (-6) = 18 > 0$ und $f''_{xx}(-2, -2) = -3 < 0 \Rightarrow (-2, -2)$ ist eine Maximalstelle von f mit Funktionswert $f(-2, -2) = -8/2 + 3 \cdot 4/2 - 6 \cdot (-2) - 8/2 + 5 = 15$.
- $H_D(-2, 2) = (-6 + 3) \cdot 6 = -18 < 0 \Rightarrow (-2, 2)$ ist eine Sattelpunktstelle von f mit Funktionswert $f(-2, 2) = -8/2 + 3 \cdot 4/2 - 6 \cdot 2 + 8/2 + 5 = -1$.
- $H_D(0, -2) = 3 \cdot (-6) = -18 < 0 \Rightarrow (0, -2)$ ist eine Sattelpunktstelle mit Funktionswert $f(0, -2) = -6 \cdot (-2) - 8/2 + 5 = 13$.
- $H_D(0, 2) = 3 \cdot 6 = 16 > 0$ und $f''_{xx}(0, 2) = 3 > 0 \Rightarrow (0, 2)$ ist eine Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(0, 2) = -6 \cdot 2 + 8/2 + 5 = -3$.