Mathematik für Ökonomen – SS 2018 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. R. Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

24.07.2018, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe
kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer
Matrikelnummer
Name
Vorname
Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

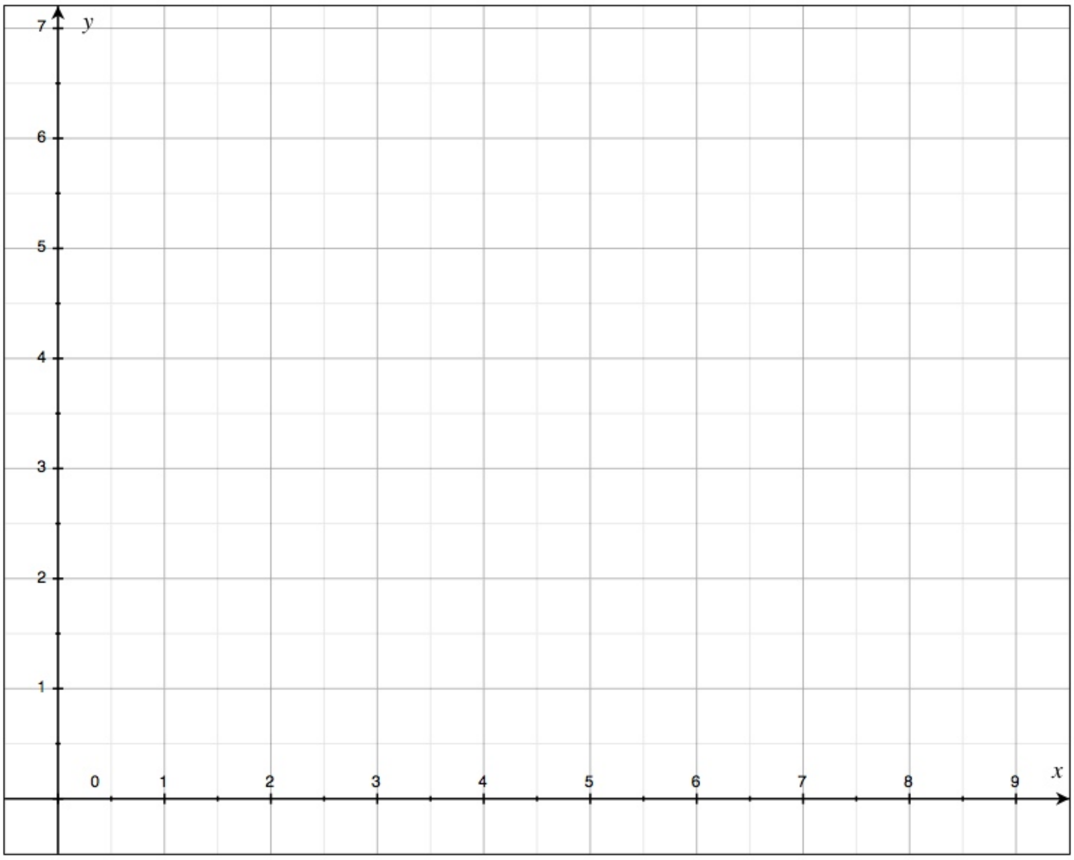
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $-\frac{1}{3} \cdot y - \frac{1}{3} \cdot x \geq -3$

(2) $y - x \leq 1$

(3) $2 \cdot y - \frac{1}{2} \cdot x \geq \frac{1}{2}$

(4) $\frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{4} \cdot x \geq \frac{5}{4}$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Aufgabe 2

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	1	3	2
	Z_2	3	2	3
	Z_3	2	8	4

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	4	6	2
	R_2	2	4	2

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 3)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Aufgabe 3

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 9 & 0 \\ 7 & 8 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 12 & 0 \end{array} \quad \overset{\text{Gauß-Jordan}}{\longrightarrow \ldots \longrightarrow} \quad \begin{array}{ccc|r} x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[4] (b) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_4 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 20\%$ und ein Zielwert K_x, der 50% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $21\%, 10\%, 0\%, 10\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{4}} \approx 1.11$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $\ln 1.5 \approx 0.44$, $121^2 = 14641$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion f an der „Nahtstelle“ $x_0 = 0$ *stetig* ist:

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(e^3 + x\right) & \text{für} \quad -1 \leq x < 0 \\ 3 & \text{für} \quad x = 0 \\ 3 \cdot e^{1+x} & \text{für} \quad 0 < x \leq 5 \end{cases}$$

Gegeben $f(x) = e^{1-x} \cdot x^2 - 1$ mit $D(f) = [-1, 1]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = -e^{1-x} \cdot \big(x^2 - 2 \cdot x\big)$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{e^2} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 4 \cdot e^{4 \cdot t} + 3 \cdot t^2 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 1/t & \text{für } 1 \leq t \leq e^2 \end{cases}$

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x \frac{1}{t^3} \cdot \ln(t)\ dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = -\frac{1}{4}$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

[5] Betrachten Sie die die Produktionsfunktion $f(x, y) = 100 \cdot x^{1/5} \cdot y^{4/5}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$.Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 50$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Kapitalelastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Arbeitselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Kapitaleinsatz um 10% erhöht und der Arbeitseinsatz um 5% vermindert.

Aufgabe 10

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 - 6 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot y^3 + 5 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal$\underline{\text{stellen}}$, Sattelpunkt$\underline{\text{stellen}}$ und die zugehörigen Funktionswerte)