

# Mathematik für Ökonomen – SS 2019 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. R. Simon, Fakultät für Mathematik

## Klausur Mathematik für Ökonomen

16.07.2019, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.  
Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,  
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe  
kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.

Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

**Platznummer**

**Matrikelnummer**

**Name**

**Vorname**

**Geburtsdatum** \_\_\_\_\_

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

**Unterschrift** \_\_\_\_\_

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.  
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

---

Abschnitt für Korrektur!

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1)  $2 \cdot y + x \geq 5$

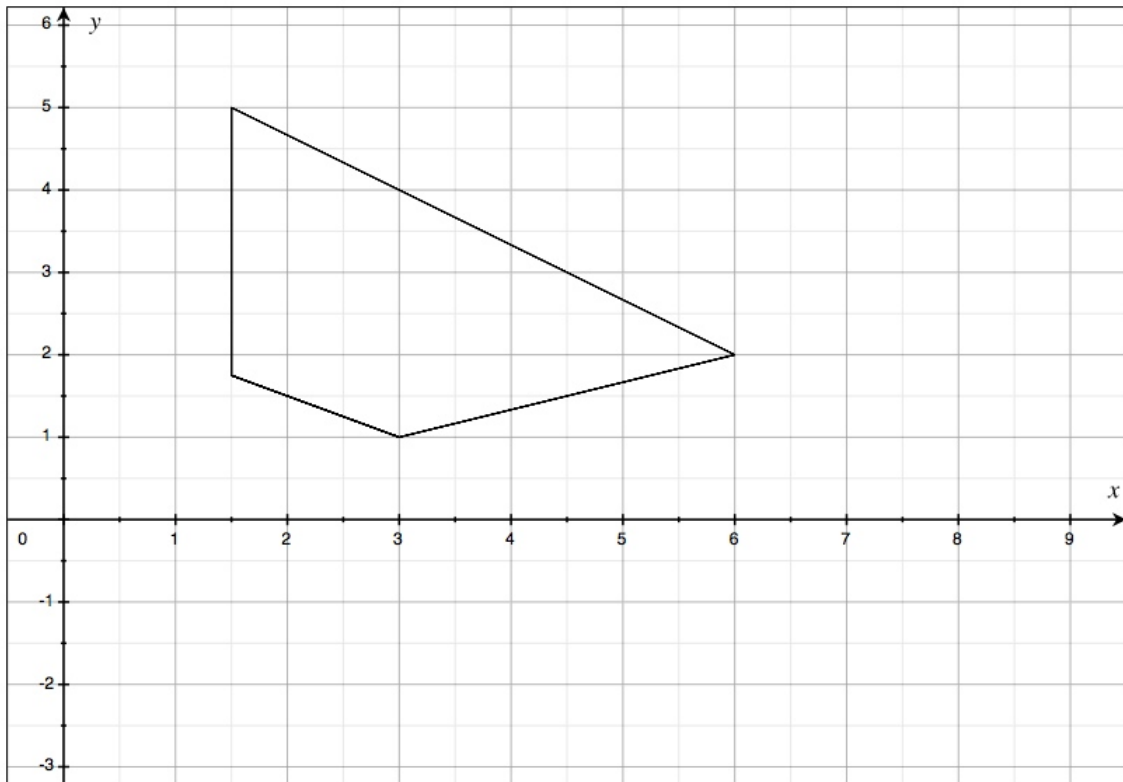
(2)  $x \geq \frac{3}{2}$

(3)  $x - 3 \cdot y \leq 0$

(4)  $3 \cdot y + 2 \cdot x \leq 18$

**Ergebniskontrolle:**

$$L = \left\{ (x, y) : y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \text{ und } x \geq \frac{3}{2} \text{ und } y \geq \frac{1}{3} \cdot x \text{ und } y \leq 6 - \frac{2}{3} \cdot x \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

**Aufgabe 2**

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

- [4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Zwischenprodukte			Endprodukte			
		$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	
Rohstoffe	$R_1$	1	1	2				
	$R_2$	2	1	1				
					$Z_1$	0	2	1
					$Z_2$	2	2	2
					$Z_3$	2	0	1

Rohstoffpreise  $r = (r_1, r_2) = (2, 3)$ .

- (a) Berechnen Sie  $M_{RE}$ , die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

- (b) Welcher Rohstoffbedarf  $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$  entsteht bei der Endproduktion  $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

**Ergebniskontrolle:**

$$(a) \quad M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix}, \quad \text{Rohstoffkosten} = r \cdot R = (2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix} = 151$$

**Aufgabe 3**

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

- [2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge  $L_{(b_1, b_2)}$  der zugehörigen Matrixgleichung  $A \cdot X = (b_1, b_2)$ .

$$\begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan} \dots} \begin{array}{ccc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & b_1^* & b_2^* \\ \hline 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

- [4] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix  $B$  mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).  
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.
- (ii) Geben Sie eine Matrixgleichung an, die durch die Inverse von  $B$  gelöst wird.

**Ergebniskontrolle:**

- (a) Im Schlußtableau ist die letzte Zeile der Koeffizientenmatrix eine Nullzeile, aber die letzte Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix ist keine Nullzeile. Also besitzt das ursprüngliche LGS keine Lösung, in Symbolen  $L_{(b_1, b_2)} = \emptyset$ .

- (b)

zu (i):

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	Protokoll
-1	-3	1	1	0	0	I
-1	1	-1	0	1	0	II
2	2	1	0	0	1	III
1	3	-1	-1	0	0	$(-1) \cdot \text{I}$
-1	1	-1	0	1	0	II
2	2	1	0	0	1	III
1	3	-1	-1	0	0	I
0	4	-2	-1	1	0	II + I
0	-4	3	2	0	1	III - 2 \cdot I
1	3	-1	-1	0	0	I
0	1	-1/2	-1/4	1/4	0	$1/4 \cdot \text{II}$
0	-4	3	2	0	1	III

1	0	1/2	-1/4	-3/4	0	I - 3 · II
0	1	-1/2	-1/4	1/4	0	II
0	0	1	1	1	1	III + 4 · II
1	0	0	-3/4	-5/4	-1/2	I - 1/2 · III
0	1	0	1/4	3/4	1/2	II + 1/2 · III
0	0	1	1	1	1	III

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & -5/4 & -1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zu (ii):

Die Inverse von  $B$  löst die folgende Matrixgleichung

$$B \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4** Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert  $K_0 > 0$ .

- [2] (a) Gegeben: Laufzeit  $n = 5$ . Wie hoch ist die erforderliche Rendite  $i = p\%$ , damit der Zielwert  $K_5$  um 15% über dem Anfangswert  $K_0$  liegt?
- [2] (b) Gegeben:  $i = 10\%$  und ein Zielwert  $K_x$ , der 15% über dem Anfangswert  $K_0$  liegt. Erforderliche Laufzeit  $n = ?$   
(d.h. mit der  $n$ -ten Verzinsung soll  $K_n$  erstmals die Bedingung  $K_n \geq K_x$  erfüllen)
- [2] (c) Gegeben: Laufzeit  $n = 5$  und Zinsstaffel 44%, 0%, 20%, 44%, 0%. Berechnen Sie den Zielwert  $K_5$  bei einem Anfangswert von  $K_0 = 100000$  und den effektiven Zinssatz  $i_{\text{eff}}$ .

Hilfswerte:  $1.15^{\frac{1}{5}} \approx 1.03$ ,  $\ln 1.25 \approx 0.22$ ,  $\ln 1.15 \approx 0.14$ ,  $12^5 = 248832$ ,  $\ln 1.1 \approx 0.1$

**Ergebniskontrolle:**

(a)  $K_5 = 1.15 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + i)^5 \Leftrightarrow 1 + i = (1.15)^{\frac{1}{5}} \approx 1.03 \Leftrightarrow i = 0.03 = 3\%$

(b)  $K_x = 1.15 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.15)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.14}{0.1} = \frac{14}{10}$ ;  $n = \lceil x \rceil = 2$

(c)  $K_5 = (1.2 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 1.44 \cdot 1) \cdot 100000 = (1.2)^5 \cdot 10^5 = 12^5 = 248832$

$i_{\text{eff}} = (1.44 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 1.44 \cdot 1)^{\frac{1}{5}} - 1 = (1.2^5)^{\frac{1}{5}} - 1 = 1.2 - 1 = 0.2 = 20\%$

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion  $f$  an der „Nahtstelle“  $x_0 = -2$  stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} (4 \cdot x)^{1/3} & \text{für } -3 < x \leq -2 \\ \ln(e^3 + x + 2) - 5 & \text{für } -2 < x \leq 2 \end{cases}$$

**Ergebniskontrolle:**

$$\text{LGW in } x_0 = -2 : \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (4 \cdot x)^{1/3} = (4 \cdot (-2))^{1/3} = (-8)^{1/3} = -2$$

$$\text{RGW in } x_0 = -2 : \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (\ln(e^3 + x + 2) - 5) = (\ln(e^3) - 5) = 3 - 5 = -2$$

$$\text{FW in } x_0 = -2: f(-2) = (4 \cdot (-2))^{1/3} = (-8)^{1/3} = -2$$

Also gilt  $\text{LGW} = \text{RGW} = \text{FW}$ , und somit ist  $f$  stetig in  $x_0 = -2$ .

Gegeben  $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 4 \cdot x + 1)$  mit  $D(f) = [0, 4]$ . Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!  
 $f$  hat die Ableitung  $f'(x) = e^x \cdot ((x-1)^2 - 4)$ .

- [3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von  $f$  über dem Definitionsbereich.

**Ergebniskontrolle:**

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x \cdot ((x-1)^2 - 4) = 0 &\Leftrightarrow ((x-1)^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow |x-1|^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow |x-1| = 2 \\ &\Leftrightarrow x-1 = -2 \quad \text{oder} \quad x-1 = 2 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{oder} \quad x = 3 \end{aligned}$$

$-1 \notin D(f)$  und  $3 \in D(f)$ , also  $x = 3$  einzige stationäre Stelle.

$$f''(x) = e^x \cdot ((x-1)^2 - 4) + e^x \cdot 2 \cdot (x-1)$$

$$f''(3) = e^3 \cdot 0 + e^3 \cdot 4 = 4 \cdot e^3, \text{ also } x = 3 \text{ lokale Minimalstelle mit } f(3) = e^3 \cdot (9 - 12 + 1) = -2 \cdot e^3.$$

- [3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von  $f$  über dem Definitionsbereich.

**Ergebniskontrolle:**

$f(0) = e^0 = 1$  und  $f(4) = e^4(16 - 16 + 1) = e^4$ , außerdem  $(3, -2 \cdot e^3)$  einzige lokale Extremstelle, und Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend. Daher

$$\begin{aligned} -2 \cdot e^3 &\text{ minimaler Wert von } f(0), f(3), f(4), \text{ also } (3, -2 \cdot e^3) \text{ globaler Minimalpunkt} \\ e^4 &\text{ maximaler Wert von } f(0), f(3), f(4), \text{ also } (4, e^4) \text{ globaler Maximalpunkt} \end{aligned}$$

- [1](c) Geben Sie den globalen Maximalpunkt von  $g(x) = -f(x)$  über dem Definitionsbereich  $D(f)$  an (bitte mit Begründung).

**Ergebniskontrolle:**

$(3, -2 \cdot e^3)$  globaler Minimalpunkt, d.h.  $f(x) \geq f(3)$  für alle  $x \in [0, 4]$ , also  $-f(x) \leq -f(3)$  für alle  $x \in [0, 4]$ . Daher  $(3, 2 \cdot e^3)$  globaler Maximalpunkt von  $g(x) = -f(x)$ .



- [4] Berechnen Sie das Integral  $\int_0^2 f(t) dt$ , wobei  $f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ e^{t-1} & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

**Ergebniskontrolle:**

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t) dt &= \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt + \int_1^2 e^{t-1} dt \\ &= \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \cdot t^{1 + \frac{1}{2}} \right]_0^1 + \int_1^2 e^t \cdot e^{-1} dt \\ &= \left[ \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 + e^{-1} \cdot \int_1^2 e^t dt \\ &= \left[ \frac{2}{3} - 0 \right] + e^{-1} \cdot [e^t]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} + e^{-1} \cdot [e^2 - e^1] \\ &= \frac{2}{3} - e^0 + e^1 = \frac{2}{3} - 1 + e^1 = -\frac{1}{3} + e^1 \end{aligned}$$

**Aufgabe 8**

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

- [4] Berechnen Sie für die Funktion  $f(x, y) = \ln(x \cdot y + 1)$  ( $x > 0, y > 0$ )  
die partiellen Ableitungen  $f'_x$ ,  $f'_y$ , sowie  $f''_{xx}$  und  $f''_{xy}$ .

**Ergebniskontrolle:**

$$f'_x(x, y) = \frac{y}{x \cdot y + 1}$$

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{0 - y \cdot y}{(x \cdot y + 1)^2} = \frac{-y^2}{(x \cdot y + 1)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x}{x \cdot y + 1}$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \frac{1 \cdot (xy + 1) - y \cdot x}{(x \cdot y + 1)^2} = \frac{1}{(x \cdot y + 1)^2}$$

**Aufgabe 9**

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion  $f(x, y) = 2 \cdot x^{1/2} + 4 \cdot y^{1/2}$  mit Kapitaleinsatz  $x > 0$  und Arbeitseinsatz  $y > 0$ . Weiterhin sei die Basisstelle  $(x_0, y_0)$  mit  $x_0 = 100$  und  $y_0 = 400$  vorgegeben.

- (a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten  $\mathcal{E}_x^f$  und  $\mathcal{E}_y^f$  an der obigen Basisstelle.  
(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion  $f$  an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die  $x$ -Variable um **50%** und die  $y$ -Variable um **-30%** verändert.

**Ergebniskontrolle:**

- (a)  $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}$  und  $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}$  mit

$$f'_x(x, y) = x^{-1/2} \text{ und } f'_y(x, y) = 2 \cdot y^{-1/2}.$$

Also gilt an der Basisstelle  $(x_0, y_0) = (100, 400)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 100 \cdot \frac{100^{-1/2}}{2 \cdot 100^{1/2} + 4 \cdot 400^{1/2}} = \frac{10}{2 \cdot 10 + 4 \cdot 20} = \frac{1}{10},$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 400 \cdot \frac{2 \cdot 400^{-1/2}}{2 \cdot 100^{1/2} + 4 \cdot 400^{1/2}} = \frac{40}{2 \cdot 10 + 4 \cdot 20} = \frac{2}{5}.$$

- (b)  $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = \frac{1}{10} \cdot 50\% + \frac{2}{5} \cdot (-30\%) = -7\%$

d.h. die relative Veränderung von  $f(100, 400)$  zu  $f(150, 280)$  beträgt ca.  $-7\%$ .

**Aufgabe 10**

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

[8] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x \cdot y + y^4 + 16 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.

(Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelpunktstellen und die zugehörigen Funktionswerte)**Ergebniskontrolle:**

$$f'_x(x, y) = 4 \cdot x - 8 \cdot y$$

$$f'_y(x, y) = -8 \cdot x + 4 \cdot y^3$$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot x - 8 \cdot y = 0 \\ -8 \cdot x + 4 \cdot y^3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \cdot y \\ -4 \cdot y + y^3 = 0 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \cdot y \\ y \cdot (y^2 - 4) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \cdot y \\ y = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 = 4 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2 \cdot x \\ y = 0 \quad \text{oder} \quad y = -2 \quad \text{oder} \quad y = 2 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Also sind die stationären Punkte:  $P1 = (-4, -2)$ ,  $P2 = (0, 0)$ ,  $P3 = (4, 2)$ .Zur Berechnung der Werte von  $H_D(x, y) = f''_{xx}(x, y) \cdot f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2$  für jeden stationären Punkt  $(x_0, y_0)$ :

$$f''_{xx}(x, y) = 4$$

$$f''_{yy}(x, y) = 12 \cdot y^2$$

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = -8$$

- $H_D(-4, -2) = 4 \cdot 12 \cdot (-2)^2 - (-8)^2 = 192 - 64 = 128 > 0$  und  $f''_{xx}(-4, -2) = 4 > 0 \Rightarrow (-4, -2)$  ist eine lokale Minimalstelle von  $f$  mit Funktionswert  $f(-4, -2) = 2 \cdot 16 - 8 \cdot 8 + 16 + 16 = 0$ .
- $H_D(0, 0) = 0 - (-8)^2 = -64 < 0 \Rightarrow (0, 0)$  ist eine Sattelpunktstelle von  $f$  mit Funktionswert  $f(0, 0) = 0 - 0 + 0 + 16 = 16$ .
- $H_D(4, 2) = 4 \cdot 12 \cdot 2^2 - (-8)^2 = 128 > 0$  und  $f''_{xx}(4, 2) = 4 > 0 \Rightarrow (4, 2)$  ist eine lokale Minimalstelle von  $f$  mit Funktionswert  $f(4, 2) = 2 \cdot 16 - 8 \cdot 8 + 16 + 16 = 0$ .