Mathematik für Ökonomen – SS 2019 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. R. Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

16.07.2019, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Abschnitt für Korrektur!

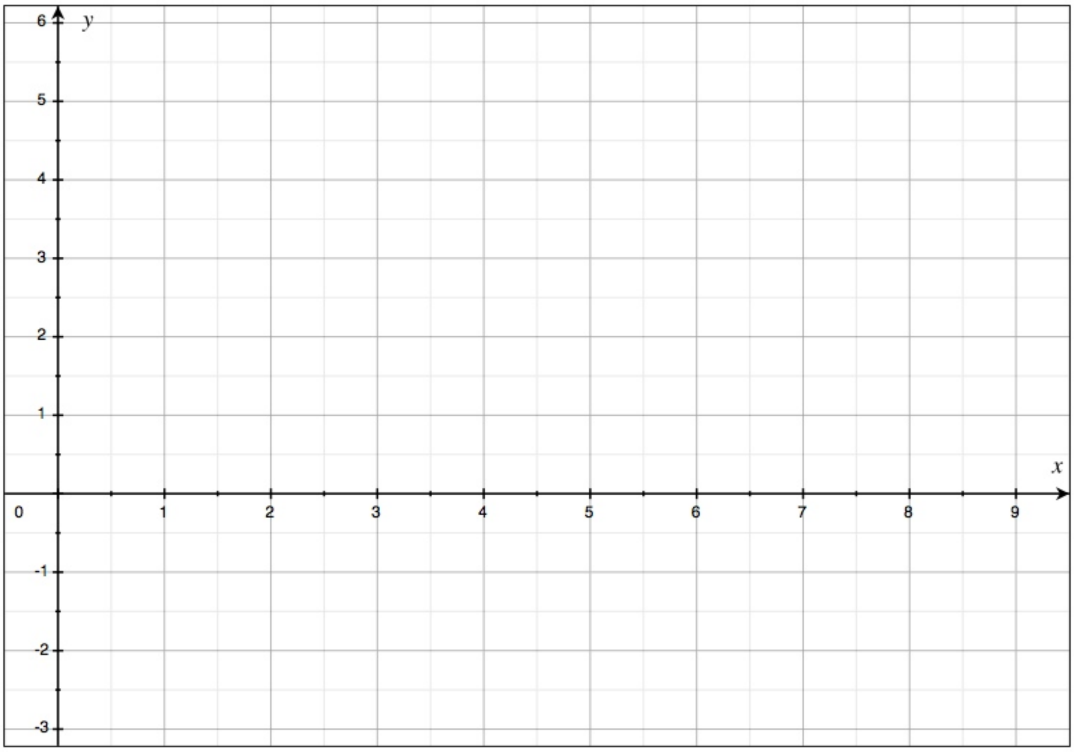
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y + x \geq 5$

(2) $x \geq \frac{3}{2}$

(3) $x - 3 \cdot y \leq 0$

(4) $3 \cdot y + 2 \cdot x \leq 18$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Zwischenprodukte		
		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	1	1	2
	R_2	2	1	1

		Endprodukte		
		E_1	E_2	E_3
Zwischenprodukte	Z_1	0	2	1
	Z_2	2	2	2
	Z_3	2	0	1

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 3)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge $L_{(b_1,b_2)}$ der zugehörigen Matrixgleichung $A \cdot X = (b_1, b_2)$.

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2
3	-1	2	1	-1
2	0	1	1	-1
1	1	0	1	2

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	b_1^*	b_2^*
1	0	1/2	1/2	-1/2
0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	0	0	0	3

[4] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

(ii) Geben Sie eine Matrixgleichung an, die durch die Inverse von B gelöst wird.

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 15% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 15% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel $44\%, 0\%, 20\%, 44\%, 0\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.15^{\frac{1}{5}} \approx 1.03$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.15 \approx 0.14$, $12^5 = 248832$, $\ln 1.1 \approx 0.1$

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion f an der „Nahtstelle“ $x_0 = -2$ *stetig* ist:

$$f(x) = \begin{cases} \left(4 \cdot x\right)^{1/3} & \text{für} \quad -3 < x \le -2 \\ \ln\left(e^3 + x + 2\right) - 5 & \text{für} \quad -2 < x \le 2 \end{cases}$$

Gegeben $f(x) = e^x \cdot \left(x^2 - 4 \cdot x + 1\right)$ mit $D(f) = [0, 4]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = e^x \cdot \left((x-1)^2 - 4\right)$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[1](c) Geben Sie den globalen Maximalpunkt von $g(x) = -f(x)$ über dem Definitionsbereich $D(f)$ an (bitte mit Begründung).

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ e^{t-1} & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = \ln(x \cdot y + 1)$ $(x > 0, y > 0)$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx} und f''_{xy} .

[5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x, y) = 2 \cdot x^{1/2} + 4 \cdot y^{1/2}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 100$ und $y_0 = 400$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\mathcal{E}_x^f$ und $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort die x-Variable um 50% und die y-Variable um -30% verändert.

[8] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x \cdot y + y^4 + 16 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)