Mathematik für Ökonomen – SS 2020 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

21.07.2020, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $x \geq 1$

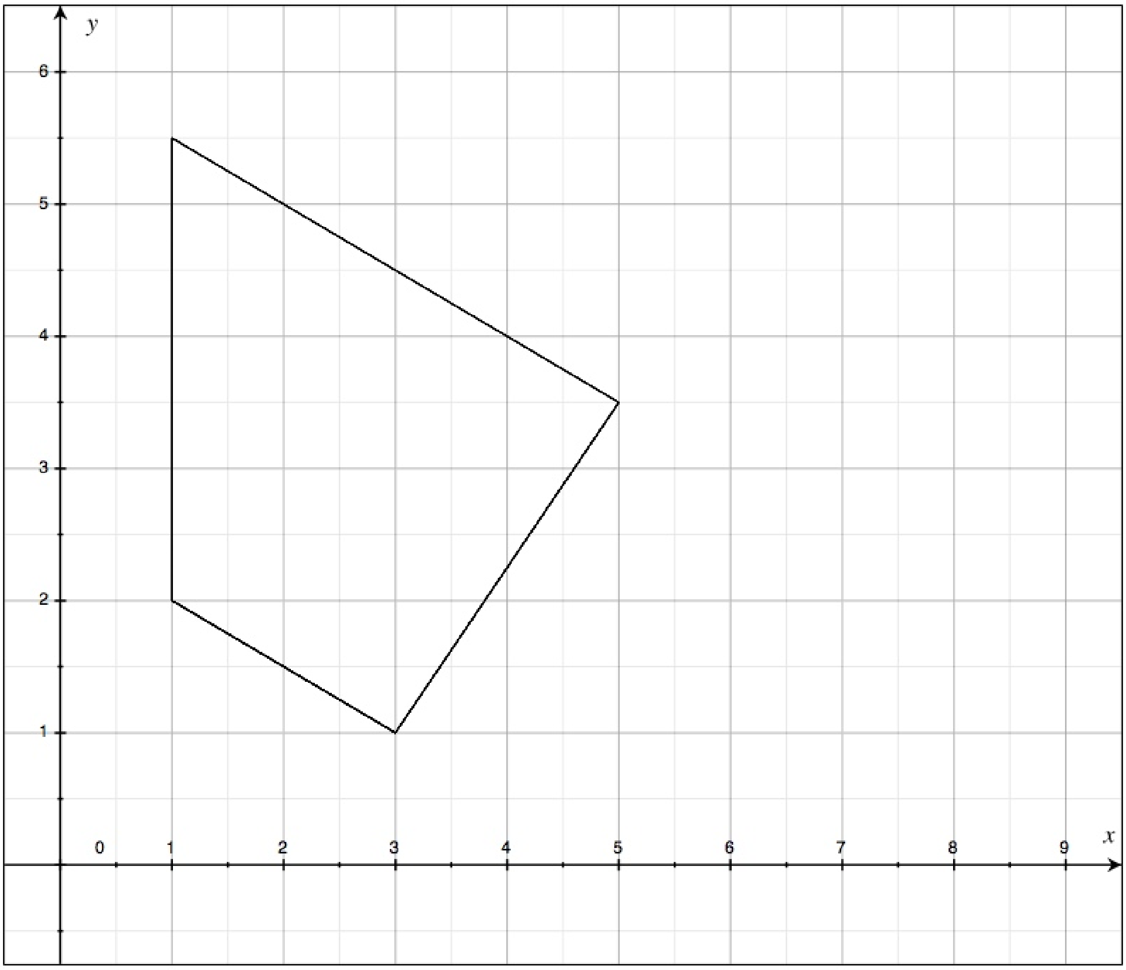
(2) $2y + x \geq 5$

(3) $-4y + 5x \leq 11$

(4) $2y + x \leq 12$

Ergebniskontrolle:

$$\mathbb{L} = \left\{ (x,y) : x \geq 1 \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \text{ und } y \geq \frac{5}{4} \cdot x - \frac{11}{4} \text{ und } y \leq 6 - \frac{1}{2}x \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^T_{2\times 3}$$

(a) $(C \cdot A) + B$

(b) B^{-1}

Ergebniskontrolle:

(a) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 2}$; $C \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 20 & 4 & 12 \\ 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $(C \cdot A) + B = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 10 \\ 21 & 4 & 12 \\ 13 & 10 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$.

(b) B^{-1} ist nicht definiert, denn die 2. Spalte ist $\frac{3}{4}\cdot$ 3.Spalte!

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

$$\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \dots \longrightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] (i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte) die Lösung der Matrix-Gleichung

$$B \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geprüft wird die Beherrschung der <u>Methode</u> - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

[1] (ii) Berechnen Sie $X \cdot B$, wobei X die Lösung der Matrix-Gleichung aus (i) bezeichne.

Ergebniskontrolle:

(a) Lösungsmenge

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b)

<u>zu (i)</u>:

Die Aufgabenstellung bedeutet nichts anderes als die Inverse von B zu berechnen

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
-1	-1	2	1	0	0	I
-3	1	2	0	1	0	II
1	-1	1	0	0	1	III
1	1	-2	-1	0	0	(-1) · I
-3	1	2	0	1	0	II
1	-1	1	0	0	1	III
1	1	-2	-1	0	0	I
0	4	-4	-3	1	0	II + 3· I
0	-2	3	1	0	1	III - I
1	1	-2	-1	0	0	I
0	1	-1	-3/4	1/4	0	1/4 · II
0	-2	3	1	0	1	III

1	0	-1	-1/4	-1/4	0	I - II
0	1	-1	-3/4	1/4	0	II
0	0	1	-1/2	1/2	1	III + 2 · II
1	0	0	-3/4	1/4	1	I + III
0	1	0	-5/4	3/4	1	II + III
0	0	1	-1/2	1/2	1	III

$$X = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1 \\ -5/4 & 3/4 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist die gesuchte Lösung der Matrix-Gleichung.}$$

zu (ii):

Die Lösung X der Matrix-Gleichung aus (i) ist nichts anderes als die Inverse von B. Daher nach Definition von Inversen

$$X \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_4 um 20% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 5\%$ und ein Zielwert K_x, der 20% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $10\%, 21\%, 0\%, 10\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.2^{\frac{1}{4}} \approx 1.05$, $\ln 1.05 \approx 0.05$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $121^2 = 14641$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_4 = 1.2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^4 \Leftrightarrow 1 + i = (1.2)^{\frac{1}{4}} \approx 1.05 \Leftrightarrow i = 0.05 = 5\%$

(b) $K_x = 1.2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.05)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.2)}{\ln(1.05)} \approx \frac{0.18}{0.05} = \frac{18}{5}$; $n = \lceil x \rceil = 4$

(c) $K_4 = (1.1 \cdot 1.21 \cdot 1 \cdot 1.1) \cdot 10000 = 11 \cdot 121 \cdot 11 = 121^2 = 14641$

$i_{\text{eff}} = (1.1 \cdot 1.21 \cdot 1 \cdot 1.1)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(1.1^4\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1.1 - 1 = 0.1 = 10\%$

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim\limits_{x\to -1} \ln\left(x^2 + e^3 - 1\right)$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x\to -1} \ln\left(x^2 + e^3 - 1\right) = \ln\left(1 + e^3 - 1\right) = \ln\left(e^3\right) = 3.$$

[2] (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 + x + 1}{6x^3 + 2x^2 + 4}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 + x + 1}{6x^3 + 2x^2 + 4} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(3 + x^{-2} + x^{-3}\right)}{x^3\left(6 + 2x^{-1} + 4x^{-3}\right)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{3 + x^{-2} + x^{-3}}{6 + 2x^{-1} + 4x^{-3}} = \frac{3+0+0}{6+0+0} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Gegeben $f(x) = (x+1) \cdot \ln\big(x+1\big)$ mit $D(f) = [0,2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = \ln\big(x+1\big) + 1$.

[2](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\big(x+1\big) + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln\big(x+1\big) = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad x + 1 = e^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad x = e^{-1} - 1 \end{aligned}$$

Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend, also $e^{-1} < e^0 = 1$, und damit $e^{-1}-1 < 0$. Daher $e^{-1} - 1 \notin D(f)$, also existiert keine stationäre Stelle! Deshalb existieren keine lokalen Extrempunkte.

[3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(0) = 1\ln(1) = 0$ und $f(2) = 3\ln 3$. Da die Logarithmusfunktion streng monoton wachsend ist, gilt $0 = \ln 1 < \ln 3$. Daher erhält man

$0 = f(0)$ als minimalen Wert von $f(0), f(2)$,
$3\ln 3 = f(2)$ als maximalen Wert von $f(0), f(2)$.

Da außderdem kein lokaler Extrempunkt existiert, ist $(0,0)$ globaler Minimalpunkt und $(2, 3\ln 3)$ globaler Maximalpunkt.

[1](c) Geben Sie den globalen Minimalpunkt von $g(x) = 4(1+x)\ln(1+x) + 5$ über dem Definitionsbereich $D(f)$ an (bitte mit Begründung).

Ergebniskontrolle:

$(0,0)$ globaler Minimalpunkt von d.h. $(1+x)\ln(1+x) \geq f(0) = 0$ für alle $x \in [0,2]$. Durch Standard-Umformungen von Ungleichungen erhält man

$$\begin{aligned} (1+x)\ln(1+x) \geq f(0) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4(1+x)\ln(1+x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4(1+x)\ln(1+x) + 5 \geq 5 = g(0). \end{aligned}$$

D.h. $\big(0,5\big)$ globaler Minimalpunkt von $g(x) = 4(1+x)\ln\big(1+x\big) + 5$.

Für $-1 \leq x \leq 1$ sei die Funktion F definiert durch $F(x) := \int_{-1}^{x} |t| \; dt$.

[2] (a) Berechnen Sie $F(0)$.

[3] (b) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in]0, 1]$.

Ergebniskontrolle:

Zur Erinnerung:

$$|t| = \begin{cases} -t & \text{für } \; -1 \leq t \leq 0 \\ \\ t & \text{für } \; 0 < t \leq 1 \end{cases} .$$

(a) Es gilt

$$F(0) = \int_{-1}^{0} |t| dt = \int_{-1}^{0} -t \; dt \quad = \quad -\int_{-1}^{0} t \; dt = -\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} = -\left[-\frac{1}{2} + 0\right] = \frac{1}{2}.$$

(b) Für $0 < x \leq 1$ gilt

$$F(x) = \int_{-1}^{x} |t| dt = \int_{-1}^{0} -t \; dt + \int_{0}^{x} t \; dt = F(0) + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - 0 = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = \ln\left(x + y^3\right)$ $(x > 0, y > 0)$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{yy}, f''_{xy}.

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{x+y^3} \cdot 1 = \frac{1}{x+y^3}$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{0 \cdot (x+y^3) - 1 \cdot (0+3y^2)}{\left(x+y^3\right)^2} = -\frac{3y^2}{\left(x+y^3\right)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{x+y^3} \cdot 3y^2 = \frac{3y^2}{x+y^3}.$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{6y \cdot (x+y^3) - 3y^2 \cdot (0+3y^2)}{\left(x+y^3\right)^2} = \frac{6y \cdot x + 6y^4 - 9y^4}{\left(x+y^3\right)^2} = \frac{6y \cdot x - 3y^4}{\left(x+y^3\right)^2}$$

[5] Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = 100 \cdot x^{3/2} \cdot y^{1/2}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit von Rohstoffpreis $x > 0$ und Transportkosten $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 50$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Kostenelastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 2% vermindert und die Transportkosten sich um 8% erhöhen.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ mit

$$f'_x(x, y) = 150 \cdot x^{1/2} \cdot y^{1/2} \text{ und } f'_y(x, y) = 50 \cdot x^{3/2} \cdot y^{-1/2}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (50, 10)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 50 \cdot \frac{150 \cdot 50^{1/2} \cdot 10^{1/2}}{100 \cdot 50^{3/2} \cdot 10^{1/2}} = \frac{150 \cdot 50^{3/2}}{100 \cdot 50^{3/2}} = \frac{150}{100} = 1.5$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 10 \cdot \frac{50 \cdot 50^{3/2} \cdot 10^{-1/2}}{100 \cdot 50^{3/2} \cdot 10^{1/2}} = \frac{50 \cdot 10^{1/2}}{100 \cdot 10^{1/2}} = \frac{50}{100} = 0.5.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = 1.5 \cdot (-2)\% + 0.5 \cdot 8\% = 1\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(50, 10)$ zu $f(49, 10.8)$ beträgt ca. 1%.

[8] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x \cdot y^2 \qquad\qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $x + 2 \cdot y = 9$.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = x + 2 \cdot y - 9 \overset{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = x \cdot y^2 + \lambda \cdot (x + 2 \cdot y - 9)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x,y) = y^2$ und $f'_y(x,y) = 2 \cdot x \cdot y$
  - $b'_x(x,y) = 1$ und $b'_y(x,y) = 2$
  - $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) = y^2 + \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) = 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot \lambda$
  - $L'_\lambda(x,y,\lambda) = b(x,y) = x + 2 \cdot y - 9$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{\begin{array}{rcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} y^2 + \lambda & = & 0 \\ 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot \lambda & = & 0 \\ x + 2 \cdot y - 9 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda & = & -y^2 \\ 2 \cdot x \cdot y - 2 \cdot y^2 & = & 0 \\ x & = & 9 - 2 \cdot y \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda & = & -y^2 \\ 2 \cdot y \cdot (x - y) & = & 0 \\ x & = & 9 - 2 \cdot y \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & = & -y^2 & & & & \\ y & = & 0 & \text{oder} & x & = & y \\ x & = & 9 - 2 \cdot y & & & & \end{array}\right\}$$

  Also sind die stationären Punkte: $P1 = (9,0)$ mit $\lambda = 0$ und $P2 = (3,3)$ mit $\lambda = -9$

- Zur Berechnung der Werte von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0:
  - $f''_{xx}(x,y) = 0, f''_{yy}(x,y) = 2x, f''_{xy}(x,y) = 2y$
  - $b''_{xx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = 0.$

- Berechnung der Werte von (x_0, y_0, λ_0) für jeden stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0
  - $D_0(9,0,0) = (0+0)\cdot 2^2 - 2\cdot(0+0)\cdot 1\cdot 2 + (2\cdot 9+0)\cdot 1^2 = 18 > 0 \Rightarrow (9,0)$ ist eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $x + 2\cdot y = 9$ mit Funktionswert $f(9,0) = 0$.
  - $D_0(3,3,-9) = (0+0)\cdot 2^2 - 2\cdot(6+0)\cdot 1\cdot 2 + (6+0)\cdot 1^2 = -24+6 = -18 < 0 \Rightarrow (3,3)$ ist eine lokale Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $x + 2\cdot y = 9$ mit Funktionswert $f(3,3) = 27$.