Mathematik für Ökonomen – SS 2020 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

21.07.2020, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

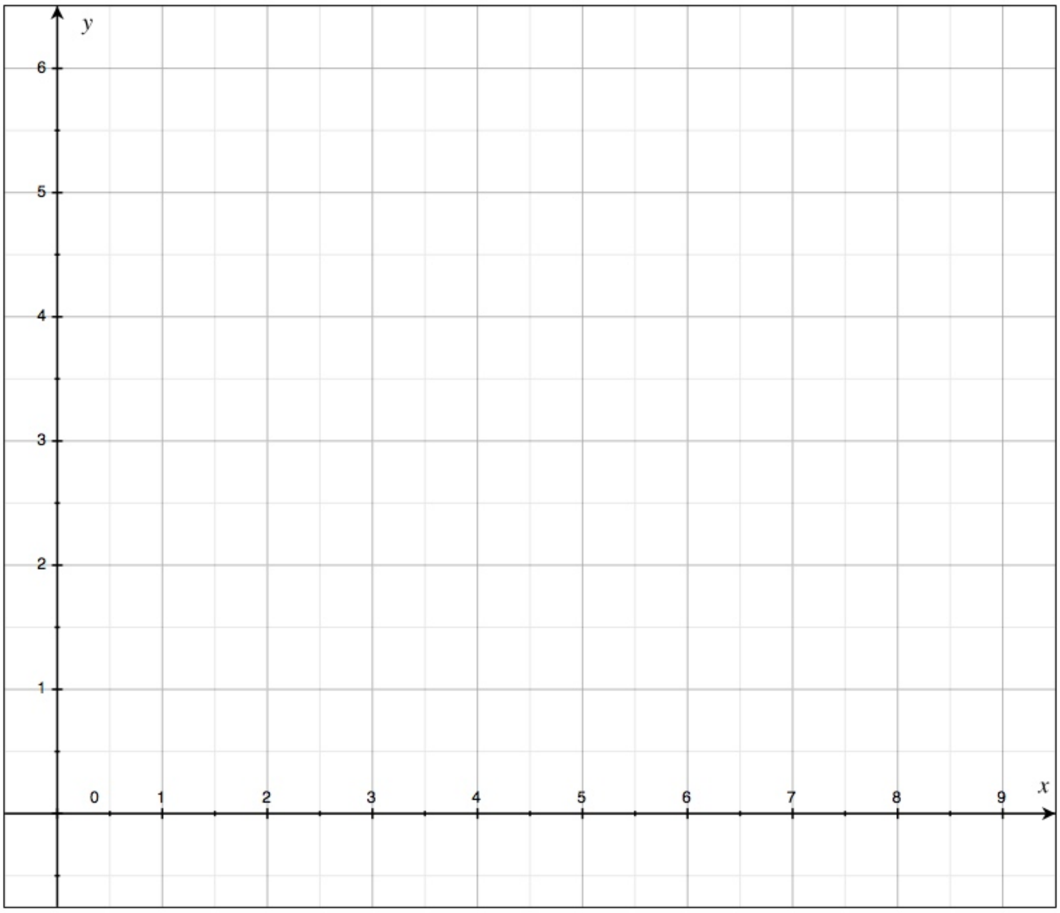
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $x \geq 1$

(2) $2y + x \geq 5$

(3) $-4y + 5x \leq 11$

(4) $2y + x \leq 12$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{T}_{2\times 3}$$

(a) $(C \cdot A) + B$

(b) B^{-1}

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

$$\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \quad \overset{\text{Gauß-Jordan}}{\longrightarrow \ldots \longrightarrow} \quad \begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] (i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte) die Lösung der Matrix-Gleichung

$$B \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geprüft wird die Beherrschung der <u>Methode</u> - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

[1] (ii) Berechnen Sie $X \cdot B$, wobei X die Lösung der Matrix-Gleichung aus (i) bezeichne.

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 4$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_4 um 20% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 5\%$ und ein Zielwert K_x, der 20% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $10\%, 21\%, 0\%, 10\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.2^{\frac{1}{4}} \approx 1.05$, $\ln 1.05 \approx 0.05$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $121^2 = 14641$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim\limits_{x \to -1} \ln\left(x^2 + e^3 - 1\right)$

[2] (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 + x + 1}{6x^3 + 2x^2 + 4}$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = (x+1) \cdot \ln\big(x+1\big)$ mit $D(f) = [0,2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = \ln\big(x+1\big) + 1$.

[2](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[3](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[1](c) Geben Sie den globalen Minimalpunkt von $g(x) = 4(1+x)\ln(1+x) + 5$ über dem Definitionsbereich $D(f)$ an (bitte mit Begründung).

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Für $-1 \leq x \leq 1$ sei die Funktion F definiert durch $F(x) := \int_{-1}^{x} |t| \, dt$.

[2] (a) Berechnen Sie $F(0)$.

[3] (b) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in]0, 1]$.

Thema: Partielle Ableitungen

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = \ln\left(x + y^3\right) \quad (x > 0, y > 0)$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{yy}, f''_{xy}.

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) = 100 \cdot x^{3/2} \cdot y^{1/2}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit von Rohstoffpreis $x > 0$ und Transportkosten $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 50$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Preiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Kostenelastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 2% vermindert und die Transportkosten sich um 8% erhöhen.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[8] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x \cdot y^2 \qquad\qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $x + 2 \cdot y = 9$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte)

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$