

# Mathematik für Ökonomen – SS 2022 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

## Klausur Mathematik für Ökonomen

19.07.2022, 08:00-10:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.  
Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,  
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe  
kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.  
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

**Platznummer**

**Matrikelnummer**

**Name**

**Vorname**

**Geburtsdatum** \_\_\_\_\_

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

**Unterschrift** \_\_\_\_\_

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.  
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

---

Einträge der Klausuraufsicht:

Unterbrechungen

Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

[Seite 1 von 12]

## Thema: Lineare Ungleichungssysteme

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1)  $2 \cdot y + x \geq 5$

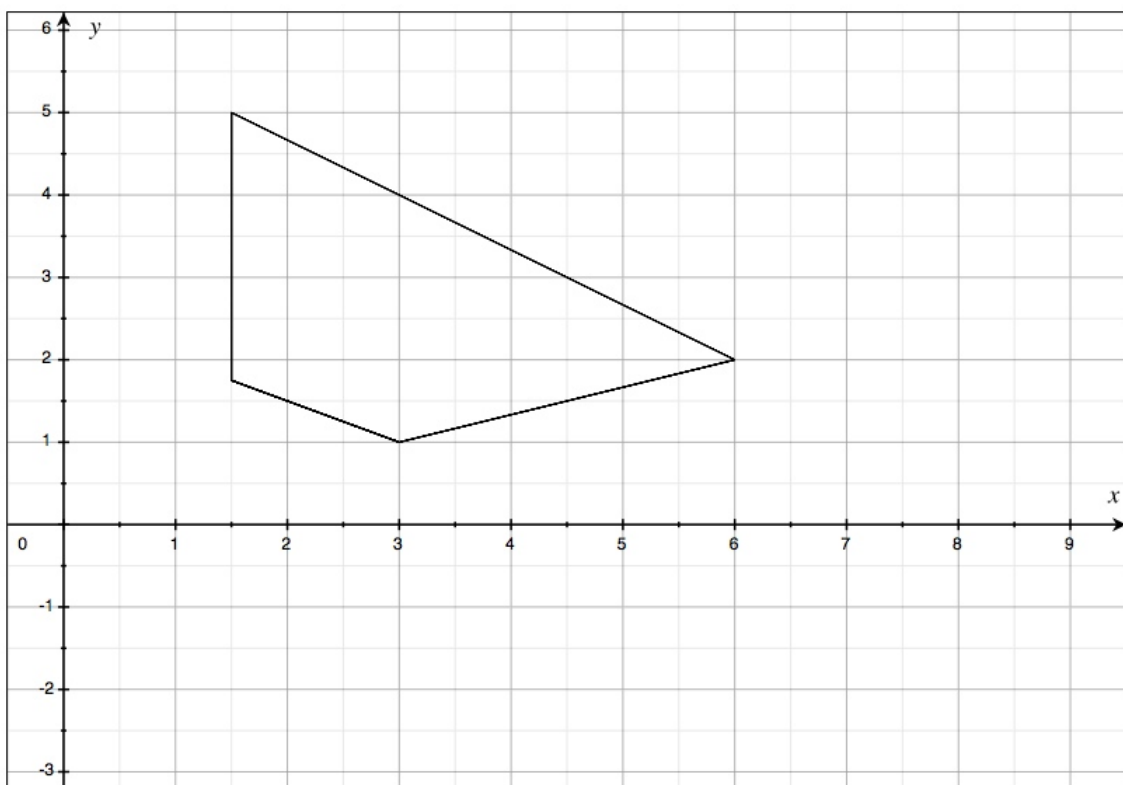
(2)  $x \geq \frac{3}{2}$

(3)  $x - 3 \cdot y \leq 0$

(4)  $3 \cdot y + 2 \cdot x \leq 18$

Ergebniskontrolle:

$$L = \left\{ (x, y) : y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \text{ und } x \geq \frac{3}{2} \text{ und } y \geq \frac{1}{3} \cdot x \text{ und } y \leq 6 - \frac{2}{3} \cdot x \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

**Thema: Rechnen mit Matrizen**

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3} ; C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3}^T$$

(a)  $C^T \cdot (A + B)$

(b)  $D^{-1}$ , wobei  $D = A + B$

**Ergebniskontrolle:**

(a)  $C^T = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$  ;  $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$  ;  $C^T \cdot (A + B) = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 12 \\ 2 & 6 & 15 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$  .

(b)  $D$  ist eine Diagonalmatrix, bei der alle Elemente auf der Hauptdiagonalen verschieden von Null sind. Daher existiert  $D^{-1}$ , und es gilt

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

**Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus**

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge  $L_b$  des zugehörigen linearen Gleichungssystems  $A \cdot x = b$ .

$$\begin{array}{ccc|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & b \\
 \hline
 1 & 2 & 3 & 6 \\
 2 & 3 & 4 & 7 \\
 3 & 4 & 5 & 8
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan} \dots}
 \begin{array}{ccc|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\
 \hline
 1 & 0 & -1 & -4 \\
 0 & 1 & 2 & 5 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

[4](b) Gelöst werden soll die folgende Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Welche Dimension hat die Matrix  $X$ ?
- (ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte) die Lösung der Matrix-Gleichung.

**Ergebniskontrolle:**

(a) Lösungsmenge

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 - 4 \\ 5 - 2 \cdot x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

(b)

zu (i):  $X$  ist eine Matrix mit 3 Zeilen und 2 Spalten.

zu (ii):

**Ansatz:** Tabellenform

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$b_1$	$b_2$	Protokoll
1	2	-1	0	1	I
2	1	1	-1	1	II
1	2	-1	0	1	I
0	-3	3	-1	-1	II - 2 · I
1	2	-1	0	1	I
0	1	-1	1/3	1/3	(-1/3) · II
1	0	1	-2/3	1/3	I - 2 · II
0	1	-1	1/3	1/3	II

**Lösung**  $X$  nach Durchführung des Gauß-Jordan Algorithmus

$$X = \begin{pmatrix} (-a - 2/3) & (-b + 1/3) \\ (a + 1/3) & (b + 1/3) \\ a & b \end{pmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$

**Thema: Zinsrechnung**

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert  $K_0 > 0$ .

- [2] (a) Gegeben: Laufzeit  $n = 3$ . Wie hoch ist die erforderliche Rendite  $i = p\%$ , damit der Zielwert  $K_3$  um 50% über dem Anfangswert  $K_0$  liegt?
- [2] (b) Gegeben:  $i = 10\%$  und ein Zielwert  $K_x$ , der 50% über dem Anfangswert  $K_0$  liegt. Erforderliche Laufzeit  $n = ?$   
(d.h. mit der  $n$ -ten Verzinsung soll  $K_n$  erstmals die Bedingung  $K_n \geq K_x$  erfüllen)
- [2] (c) Gegeben: Laufzeit  $n = 3$  und Zinsstaffel 69%, 0%, 30%. Berechnen Sie den Zielwert  $K_3$  bei einem Anfangswert von  $K_0 = 1000$  und den effektiven Zinssatz  $i_{\text{eff}}$ .

Hilfswerte:  $1.5^{\frac{1}{3}} \approx 1.14$ ,  $\ln 1.1 \approx 0.1$ ,  $\ln 1.5 \approx 0.41$ ,  $13^3 = 2197$ ,  $\ln 2.5 \approx 0.92$

**Ergebniskontrolle:**

- (a)  $K_3 = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + i)^3 \Leftrightarrow 1 + i = (1.5)^{\frac{1}{3}} \approx 1.14 \Leftrightarrow i = 0.14 = 14\%$
- (b)  $K_x = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.5)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.41}{0.1} = \frac{41}{10}$ ;  $n = \lceil x \rceil = 5$
- (c)  $K_3 = (1.69 \cdot 1 \cdot 1.3) \cdot 1000 = 169 \cdot 13 = 13^3 = 2197$   
 $i_{\text{eff}} = (1.69 \cdot 1 \cdot 1.3)^{\frac{1}{3}} - 1 = (1.3^3)^{\frac{1}{3}} - 1 = 1.3 - 1 = 0.3 = 30\%$

**Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen**

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5 \cdot x + 2)^{3/4}$

**Ergebniskontrolle:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5 \cdot x + 2)^{3/4} = \dots = 8.$$

[2] (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot x^{5/2} + x + 1}{6 \cdot x^{5/2} + 2 \cdot x^2 + 4}$

**Ergebniskontrolle:**

**Ansatz:** Ausklammern der höchsten Nennerpotenz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot x^{5/2} + x + 1}{6 \cdot x^{5/2} + 2 \cdot x^2 + 4} = \dots = \frac{5 + 0 + 0}{6 + 0 + 0} = \frac{5}{6}.$$

**Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen**

Gegeben  $f(x) = ((x+2)^{3/2} - 8)^2$  mit  $D(f) = [-1, 7]$ . Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!  
 $f$  hat die Ableitung  $f'(x) = 3 \cdot ((x+2)^{3/2} - 8) \cdot (x+2)^{1/2}$ .

- [4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von  $f$  über dem Definitionsbereich.

**Ergebniskontrolle:**

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von  $f(x)$ :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x+2)^{3/2} = 8 \text{ oder } x+2 = 0 \Leftrightarrow x+2 = 8^{2/3} = 4 \text{ oder } x = -2 \\ \Leftrightarrow x = 2 \text{ oder } x = -2$$

$-2 \notin D(f)$ ,  $2 \in D(f)$  und keine Randstelle von  $D(f)$ . Also  $x = 2$  einzige stationäre Stelle.

Für Untersuchung, ob stationäre Stelle lokale Extremstelle ist, Berechnung von  $f''(x)$

$$f''(x) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot (x+2) + \frac{1}{2} \cdot ((x+2)^{3/2} - 8) \cdot (x+2)^{-1/2}\right)$$

$$f''(2) = \dots = 18 > 0, \text{ also } x = 2 \text{ lokale Minimalstelle mit } f(2) = (4^{3/2} - 8)^2 = 0.$$

- [2](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von  $f$  über dem Definitionsbereich.

**Ergebniskontrolle:**

$f(-1) = (1 - 8)^2 = 49$  und  $f(7) = (9^{3/2} - 8)^2 = 19^2 (= 361)$ . Es gilt

$$0 < 49 = 7^2 < 19^2 = 361.$$

Somit erhalten wir

$0 = f(2)$  als minimalen Wert von  $f(-1), f(2), f(7)$ ,

$361 = 19^2 = f(7)$  als maximalen Wert von  $f(-1), f(2), f(7)$ .

D.h.  $(2, 0)$  ist globaler Minimalpunkt, und  $(7, 361)$  ist globaler Maximalpunkt.

**Thema: Elementare Berechnung von Integralen**

Gegeben sei die stückweise stetige Funktion  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{e^t} & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \\ t + t^{-1} & \text{für } 2 < t \leq 4 \end{cases}.$$

Für  $0 \leq x \leq 4$  sei die Funktion  $F$  definiert durch  $F(x) := \int_0^x f(t) dt$ .

[2] (a) Berechnen Sie  $F(1)$ .

[4] (b) Berechnen Sie  $F(x)$  für  $x \in ]2, 4]$ .

**Ergebniskontrolle:**

(a) Es gilt

$$F(1) = \int_0^1 \frac{1}{e^t} dt = \int_0^1 e^{-t} dt = \dots = -e^{-1} + 1.$$

(b) Für  $2 < x \leq 4$  gilt

$$F(x) = \int_0^2 \frac{1}{e^t} dt + \int_2^x (t + t^{-1}) dt = \dots = \frac{x^2}{2} + \ln x - 1 - e^{-2} - \ln 2.$$

**Thema: Partielle Ableitungen**

- [4] Berechnen Sie für die Funktion  $f(x, y) = y^3 \cdot e^{x^2}$  ( $x > 0, y > 0$ ) die partiellen Ableitungen  $f'_x$ ,  $f'_y$ , sowie  $f''_{xx}$ ,  $f''_{yy}$ .

**Ergebniskontrolle:**

$$f'_x(x, y) = 2 \cdot x \cdot y^3 \cdot e^{x^2}$$

$$f''_{xx}(x, y) = \dots = 2 \cdot y^3 \cdot e^{x^2} + 4 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot e^{x^2}$$

$$f'_y(x, y) = 3 \cdot y^2 \cdot e^{x^2}$$

$$f''_{yy}(x, y) = 6 \cdot y \cdot e^{x^2}$$

## Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Cobb-Douglas Produktionsfunktion  $f(x, y) = 100 \cdot x^{1/4} \cdot y^{3/4}$  mit Kapitaleinsatz  $x > 0$  und Arbeitseinsatz  $y > 0$ . Weiterhin sei die Basisstelle  $(x_0, y_0)$  mit  $x_0 = 500$  und  $y_0 = 100$  vorgegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Kapitalelastizität  $\mathcal{E}_x^f$  und die Arbeitselastizität  $\mathcal{E}_y^f$  an der obigen Basisstelle.
- (b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion  $f$  an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Kapitaleinsatz um 12% erhöht und der Arbeitseinsatz sich um 8% vermindert.

## Ergebniskontrolle:

(a)  $\mathcal{E}_x^f(500, 100) = 500 \cdot \frac{f'_x(500, 100)}{f(500, 100)}$  und  $\mathcal{E}_y^f(500, 100) = 100 \cdot \frac{f'_y(500, 100)}{f(500, 100)}$  mit

$$f'_x(x, y) = 25 \cdot x^{-3/4} \cdot y^{3/4} \text{ und } f'_y(x, y) = 75 \cdot x^{1/4} \cdot y^{-1/4}.$$

Also gilt an der Basisstelle  $(x_0, y_0) = (500, 100)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = \dots = \frac{1}{4} = 0.25$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = \dots = \frac{3}{4} = 0.75.$$

(b)  $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(500, 100) \cdot \frac{dx}{500} + \mathcal{E}_y^f(500, 100) \cdot \frac{dy}{100} = 0.25 \cdot 12\% + 0.75 \cdot (-8)\% = -3\%$

d.h. die relative Veränderung von  $f(500, 100)$  zu  $f(560, 92)$  beträgt ca.  $-3\%$ .

**Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)**

[7] Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode die Funktion

$$f(x, y) = e^{x^2+y} \quad (x > 0, y < 0)$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung  $2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y = 2$ .

(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion

**Formel für die berandete Hesse-Determinante:**

$$\begin{aligned} D(x, y, \lambda) \\ := & (f''_{xx}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x, y)) \cdot (b'_y(x, y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x, y)) \cdot b'_x(x, y) \cdot b'_y(x, y) \\ & + (f''_{yy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x, y)) \cdot (b'_x(x, y))^2 \end{aligned}$$

**Ergebniskontrolle:**

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form  
 $b(x, y) = 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - 2 \stackrel{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion  
 $L(x, y, \lambda) = e^{x^2+y} + \lambda \cdot (2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - 2)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x, y) = 2 \cdot x \cdot e^{x^2+y}$  und  $f'_y(x, y) = e^{x^2+y}$
  - $b'_x(x, y) = 2$  und  $b'_y(x, y) = 1/2$
  - $L'_x(x, y, \lambda) = f'_x(x, y) + \lambda \cdot b'_x(x, y) = 2 \cdot x \cdot e^{x^2+y} + 2 \cdot \lambda$
  - $L'_y(x, y, \lambda) = f'_y(x, y) + \lambda \cdot b'_y(x, y) = e^{x^2+y} + \frac{1}{2} \cdot \lambda$
  - $L'_\lambda(x, y, \lambda) = b(x, y) = 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - 2$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot x - 4 = 0 \\ \lambda = -2 \cdot e^{x^2+y} \\ 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - 2 = 0 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ \lambda = -2 \cdot e^{x^2+y} \\ y = -4 \cdot x + 4 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Also ist  $(2, -4, -2)$  die einzige Lösung des Gleichungssystems. Außerdem  $(2, -4) \in D(f)$ , so dass  $P_1 = (2, -4)$  der einzige bedingt stationäre Punkt ist.

- Zur Berechnung des Wertes von  $D(2, -4, -2)$

- $f''_{xx}(x, y) = 2 \cdot e^{x^2+y} + 4 \cdot x^2 \cdot e^{x^2+y}$ ,  $f''_{yy}(x, y) = e^{x^2+y}$ ,  $f''_{xy}(x, y) = 2 \cdot x \cdot e^{x^2+y}$

- $b''_{xx}(x, y) = b''_{yy}(x, y) = b''_{xy}(x, y) = b''_{yx}(x, y) = 0$ .

- Berechnung des Wertes von  $(2, -4, -2)$

$$D(2, -4, -2) = \dots = \frac{1}{2}.$$

$D(2, -4, -2) > 0$ , also ist  $(2, -4)$  eine lokale Minimalstelle von  $f$  unter der Nebenbedingung  $2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y = 2$  mit Funktionswert  $f(2, -4) = e^{4-4} = 1$ .