Mathematik für Ökonomen – SS 2022 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

19.07.2022, 08:00-10:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y + x \geq 5$

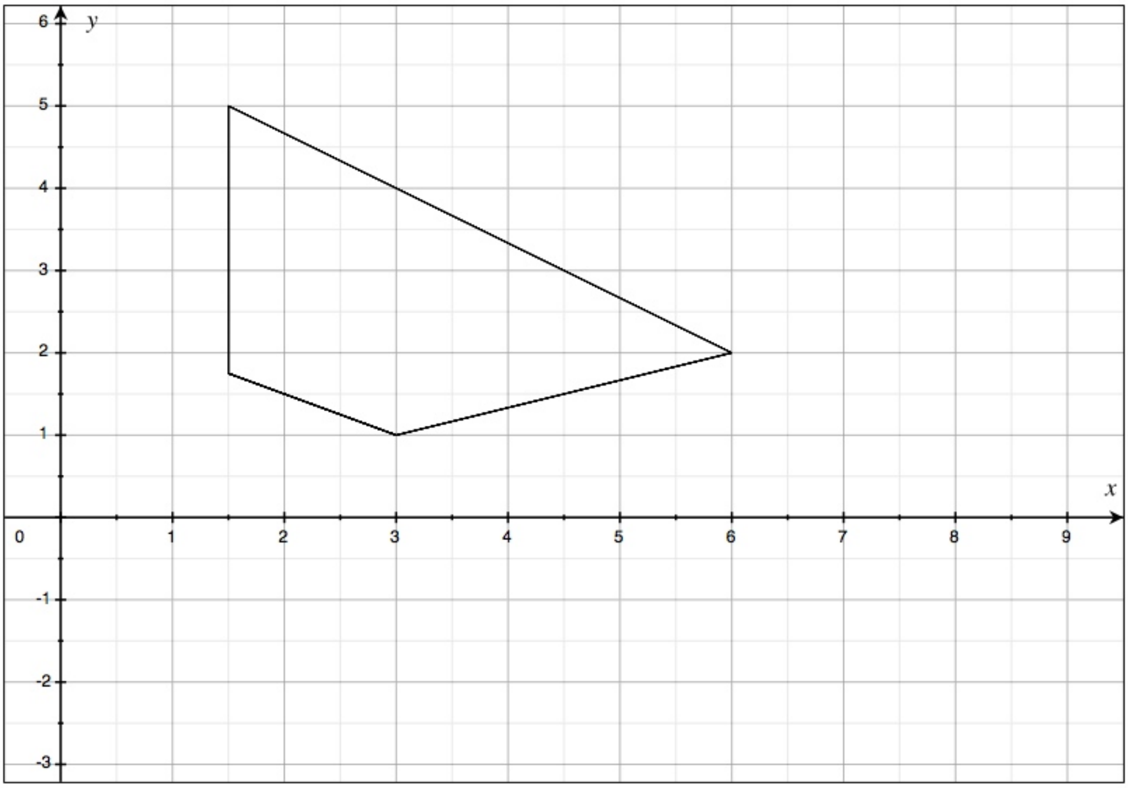
(2) $x \geq \frac{3}{2}$

(3) $x - 3 \cdot y \leq 0$

(4) $3 \cdot y + 2 \cdot x \leq 18$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{(x, y) : y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \text{ und } x \geq \frac{3}{2} \text{ und } y \geq \frac{1}{3} \cdot x \text{ und } y \leq 6 - \frac{2}{3} \cdot x\right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^T_{2\times 3}$$

(a) $C^T \cdot (A + B)$

(b) D^{-1}, wobei $D = A + B$

Ergebniskontrolle:

(a) $C^T = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$; $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$; $C^T \cdot (A + B) = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 12 \\ 2 & 6 & 15 \end{pmatrix}_{2\times 3}$.

(b) D ist eine Diagonalmatrix, bei der alle Elemente auf der Hauptdiagonalen verschieden von Null sind. Daher existiert D^{-1}, und es gilt

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

x_1	x_2	x_3	b
1	2	3	6
2	3	4	7
3	4	5	8

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	b^*
1	0	-1	-4
0	1	2	5
0	0	0	0

[4](b) Gelöst werden soll die folgende Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Welche Dimension hat die Matrix X?

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte) die Lösung der Matrix-Gleichung.

Ergebniskontrolle:

(a) Lösungsmenge

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 - 4 \\ 5 - 2 \cdot x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \;:\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

(b)

zu (i): X ist eine Matrix mit 3 Zeilen und 2 Spalten.

zu (ii):

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2	Protokoll
1	2	- 1	0	1	I
2	1	1	-1	1	II
1	2	-1	0	1	I
0	-3	3	-1	-1	II - 2· I
1	2	-1	0	1	I
0	1	-1	1/3	1/3	(-1/3)· II
1	0	1	-2/3	1/3	I- 2· II
0	1	-1	1/3	1/3	II

Lösung X der Matrixgleichung spaltenweise

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 - 2/3 \\ x_3 + 1/3 \\ x_3 \end{pmatrix} \;:\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 + 1/3 \\ x_3 + 1/3 \\ x_3 \end{pmatrix} \;:\; x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei die x_3 in L_1 und L_2 unabhängig voneinander frei wählbar sind, d.h.

$$X = \begin{pmatrix} (-a - 2/3) & (-b + 1/3) \\ (a + 1/3) & (b + 1/3) \\ a & b \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_3 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 50% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 3$ und Zinsstaffel $69\%, 0\%, 30\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_3 bei einem Anfangswert von $K_0 = 1000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{3}} \approx 1.14$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $13^3 = 2197$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_3 = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^3 \Leftrightarrow 1 + i = (1.5)^{\frac{1}{3}} \approx 1.14 \Leftrightarrow i = 0.14 = 14\%$

(b) $K_x = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.5)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.41}{0.1} = \frac{41}{10}$; $n = \lceil x \rceil = 5$

(c) $K_3 = (1.69 \cdot 1 \cdot 1.3) \cdot 1000 = 169 \cdot 13 = 13^3 = 2197$

$i_{\text{eff}} = (1.69 \cdot 1 \cdot 1.3)^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(1.3^3\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 1.3 - 1 = 0.3 = 30\%$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+5\cdot x+2\right)^{3/4}$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2+5\cdot x+2\right)^{3/4}=(4+10+2)^{3/4}=16^{3/4}=8.$$

[2] (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5\cdot x^{5/2}+x+1}{6\cdot x^{5/2}+2\cdot x^2+4}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{5\cdot x^{5/2}+x+1}{6\cdot x^{5/2}+2\cdot x^2+4} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{5/2}\cdot\left(5+x^{-3/2}+x^{-5/2}\right)}{x^{5/2}\cdot\ \left(6+2\cdot x^{-1/2}+4\cdot x^{-5/2}\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{5+x^{-3/2}+x^{-5/2}}{6+2\cdot x^{-1/2}+4\cdot x^{-5/2}}=\frac{5+0+0}{6+0+0}=\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = \big((x+2)^{3/2} - 8\big)^2$ mit $D(f) = [-1, 7]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = 3 \cdot \big((x+2)^{3/2} - 8\big) \cdot (x+2)^{1/2}$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3 \cdot \big((x+2)^{3/2} - 8\big) \cdot (x+2)^{1/2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 \cdot \big((x+2)^{3/2} - 8\big) = 0 \text{ oder } (x+2)^{1/2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^{3/2} = 8 \text{ oder } x+2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x+2 = 8^{2/3} = 4 \text{ oder } x = -2 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ oder } x = -2 \end{aligned}$$

$-2 \notin D(f)$, $2 \in D(f)$ und keine Randstelle von $D(f)$. Also $x = 2$ einzige stationäre Stelle.

Für Untersuchung, ob stationäre Stelle lokale Extremstelle ist, Berechnung von $f''(x)$

$f''(x) = 3 \cdot \big(\frac{3}{2} \cdot (x+2) + \frac{1}{2} \cdot \big((x+2)^{3/2} - 8\big) \cdot (x+2)^{-1/2}\big)$

$f''(2) = 3 \cdot \big(\frac{3}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (4^{3/2} - 8) \cdot 4^{-1/2}\big) = 18 > 0$, also $x = 2$ lokale Minimalstelle mit $f(2) = \big(4^{3/2} - 8\big)^2 = 0$.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(-1) = (1-8)^2 = 49$ und $f(7) = \big(9^{3/2} - 8\big)^2 = 19^2 (= 361)$. Es gilt

$$0 < 49 = 7^2 < 19^2 = 361.$$

Somit erhalten wir

$0 = f(2)$ als minimalen Wert von $f(-1), f(2), f(7)$,
$361 = 19^2 = f(7)$ als maximalen Wert von $f(-1), f(2), f(7)$.

D.h. $(2, 0)$ ist globaler Minimalpunkt, und $(7, 361)$ ist globaler Maximalpunkt.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die stückweise stetige Funktion $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^t} & \text{für } \ 0 \le t \le 2 \\[2ex] t + t^{-1} & \text{für } \ 2 < t \le 4 \end{cases}.$$

Für $0 \le x \le 4$ sei die Funktion F definiert durch $F(x) := \int_0^x f(t)\ dt$.

[2] (a) Berechnen Sie $F(1)$.

[4] (b) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in]2,4]$.

Ergebniskontrolle:

(a) Es gilt

$$F(1) = \int_0^1 \frac{1}{e^t}\ dt = \int_0^1 e^{-t}\ dt \quad = \quad \left[-e^{-t}\right]_0^1 = -e^{-1} + 1.$$

(b) Für $2 < x \le 4$ gilt

$$\begin{aligned} F(x) = \int_0^2 \frac{1}{e^t}\ dt + \int_2^x (t + t^{-1})\ dt \quad &= \quad \int_0^2 e^{-t}\ dt + \int_2^x t\ dt + \int_2^x t^{-1}\ dt \\ &= \quad \left[-e^{-t}\right]_0^2 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_2^x + [\ln t]_2^x \\ &= \quad -e^{-2} + 1 + \frac{x^2}{2} - 2 + \ln x - \ln 2 \\ &= \quad \frac{x^2}{2} + \ln x - 1 - e^{-2} - \ln 2. \end{aligned}$$

Thema: Partielle Ableitungen

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = y^3 \cdot e^{x^2} \quad (x > 0, y > 0)$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy}.

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x,y) = y^3 \cdot e^{x^2} \cdot 2 \cdot x = 2 \cdot x \cdot y^3 \cdot e^{x^2}$

$f''_{xx}(x,y) = 2 \cdot y^3 \cdot e^{x^2} + 2 \cdot x \cdot y^3 \cdot e^{x^2} \cdot 2 \cdot x = 2 \cdot y^3 \cdot e^{x^2} + 4 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot e^{x^2}$

$f'_y(x,y) = 3 \cdot y^2 \cdot \cdot e^{x^2}$

$f''_{yy}(x,y) = 6 \cdot y \cdot e^{x^2}$

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Cobb-Douglas Produktionsfunktion $f(x,y) = 100 \cdot x^{1/4} \cdot y^{3/4}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 500$ und $y_0 = 100$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Kapitalelastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Arbeitselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Kapitaleinsatz um 12% erhöht und der Arbeitseinsatz sich um 8% vermindert.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(500, 100) = 500 \cdot \frac{f_x'(500,100)}{f(500,100)}$ und $\mathcal{E}_y^f(500, 100) = 100 \cdot \frac{f_y'(500,100)}{f(500,100)}$ mit

$$f_x'(x,y) = 25 \cdot x^{-3/4} \cdot y^{3/4} \text{ und } f_y'(x,y) = 75 \cdot x^{1/4} \cdot y^{-1/4}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (500, 100)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = 500 \cdot \frac{25 \cdot 500^{-3/4} \cdot 100^{3/4}}{100 \cdot 500^{1/4} \cdot 100^{3/4}} = \frac{25 \cdot 500^{1/4}}{100 \cdot 500^{1/4}} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0.25$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = 100 \cdot \frac{75 \cdot 500^{3/4} \cdot 100^{-1/4}}{100 \cdot 500^{3/4} \cdot 100^{3/4}} = \frac{75 \cdot 100^{3/4}}{100 \cdot 100^{3/4}} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(500, 100) \cdot \frac{dx}{500} + \mathcal{E}_y^f(500, 100) \cdot \frac{dy}{100} = 0.25 \cdot 12\% + 0.75 \cdot (-8)\% = -3\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(500, 100)$ zu $f(560, 92)$ beträgt ca. -3%.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[7] Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode die Funktion

$$f(x,y) = e^{x^2+y} \qquad\qquad (x > 0, y < 0)$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y = 2$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - 2 \stackrel{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = e^{x^2+y} + \lambda \cdot \left(2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - 2\right)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x,y) = 2 \cdot x \cdot e^{x^2+y}$ und $f'_y(x,y) = e^{x^2+y}$
  - $b'_x(x,y) = 2$ und $b'_y(x,y) = 1/2$
  - $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) = 2 \cdot x \cdot e^{x^2+y} + 2 \cdot \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) = e^{x^2+y} + \frac{1}{2} \cdot \lambda$
  - $L'_\lambda(x,y,\lambda) = b(x,y) = 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - 2$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2 \cdot x \cdot e^{x^2+y} + 2 \cdot \lambda & = & 0 \\ e^{x^2+y} + \frac{1}{2} \cdot \lambda & = & 0 \\ 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - 2 & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2 \cdot x \cdot e^{x^2+y} - 4 \cdot e^{x^2+y} & = & 0 \\ \lambda & = & -2 \cdot e^{x^2+y} \\ 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - 2 & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2 \cdot x - 4 & = & 0 \\ \lambda & = & -2 \cdot e^{x^2+y} \\ 2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y - 2 & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ \lambda & = & -2 \cdot e^{x^2+y} \\ y & = & -4 \cdot x + 4 \end{array} \right\}$$

Also ist $(2, -4, -2)$ die einzige Lösung des Gleichungssystems. Außerdem $(2, -4) \in D(f)$, so dass $P1 = (2, -4)$ der einzige bedingt stationäre Punkt ist.

- Zur Berechnung des Wertes von $D(2,-4,-2)$
  - $f''_{xx}(x,y) = 2 \cdot e^{x^2+y} + 4 \cdot x^2 \cdot e^{x^2+y}$, $f''_{yy}(x,y) = e^{x^2+y}$, $f''_{xy}(x,y) = 2 \cdot x \cdot e^{x^2+y}$
  - $b''_{xx}(x,y) = b''_{yy}(x,y) = b''_{xy}(x,y) = b''_{yx}(x,y) = 0$.
- Berechnung des Wertes von $(2,-4,-2)$

$$\begin{aligned} D(2,-4,-2) &= (f''_{xx}(2,-4)+0) \cdot \big(\frac{1}{2}\big)^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(2,-4)+0) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + (f''_{yy}(2,-4)+0) \cdot 2^2 \\ &= 18 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

  $D(2,-4,-2) > 0$, also ist $(2,-4)$ eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y = 2$ mit Funktionswert $f(2,-4) = e^{4-4} = 1$.