Mathematik für Ökonomen – SS 2022 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

19.07.2022, 08:00-10:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Abschnitt für Korrektur!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

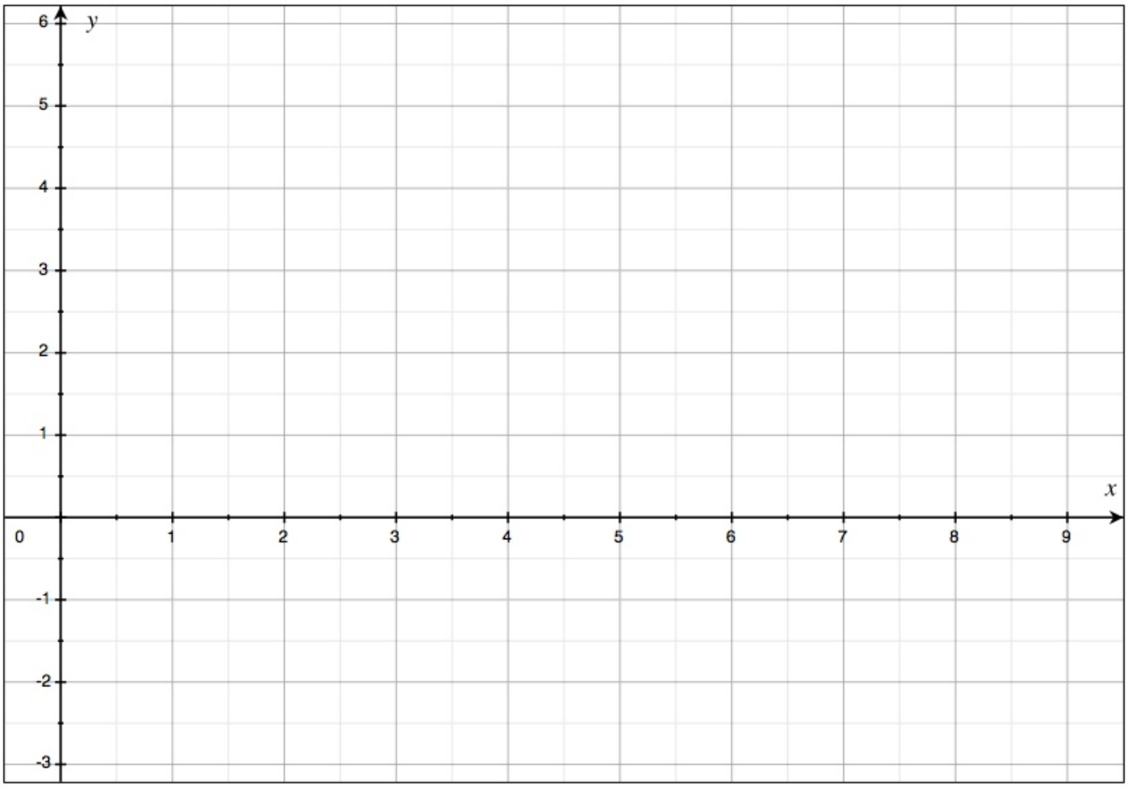
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y + x \geq 5$

(2) $x \geq \frac{3}{2}$

(3) $x - 3 \cdot y \leq 0$

(4) $3 \cdot y + 2 \cdot x \leq 18$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{T}_{2\times 3}$$

(a) $C^T \cdot (A + B)$

(b) D^{-1}, wobei $D = A + B$

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\ \hline 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[4](b) Gelöst werden soll die folgende Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Welche Dimension hat die Matrix X?

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte) die Lösung der Matrix-Gleichung.

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_3 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 50% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 3$ und Zinsstaffel $69\%, 0\%, 30\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_3 bei einem Anfangswert von $K_0 = 1000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{3}} \approx 1.14$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $13^3 = 2197$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 + 5 \cdot x + 2\right)^{3/4}$

[2] (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 \cdot x^{5/2} + x + 1}{6 \cdot x^{5/2} + 2 \cdot x^2 + 4}$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = \big((x+2)^{3/2} - 8\big)^2$ mit $D(f) = [-1, 7]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = 3 \cdot \big((x+2)^{3/2} - 8\big) \cdot (x+2)^{1/2}$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die stückweise stetige Funktion $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^t} & \text{für } \; 0 \leq t \leq 2 \\ t + t^{-1} & \text{für } \; 2 < t \leq 4 \end{cases}.$$

Für $0 \leq x \leq 4$ sei die Funktion F definiert durch $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$.

[2] (a) Berechnen Sie $F(1)$.

[4] (b) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in]2,4]$.

Thema: Partielle Ableitungen

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = y^3 \cdot e^{x^2} \quad (x > 0, y > 0)$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yy}.

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Cobb-Douglas Produktionsfunktion $f(x, y) = 100 \cdot x^{1/4} \cdot y^{3/4}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 500$ und $y_0 = 100$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Kapitalelastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Arbeitselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Kapitaleinsatz um 12% erhöht und der Arbeitseinsatz sich um 8% vermindert.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[7] Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode die Funktion

$$f(x,y) = e^{x^2+y} \qquad (x > 0, y < 0)$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y = 2$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$