Mathematik für Ökonomen – SS 2023 – Campus Duisburg
Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. Rene Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

18.07.2023, 08:00-10:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer
Matrikelnummer
Name
Vorname
Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.
Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Korrekturabschnitt!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y \ + \ x \ \leq \ 9$

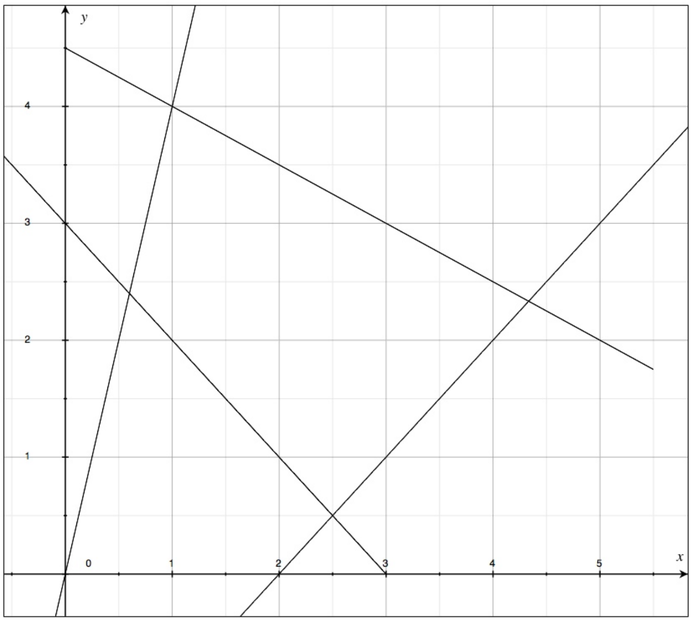
(2) $2 \cdot x \ - \ \frac{1}{2} \ \cdot y \geq \ 0$

(3) $y \ - x \geq \ -2$

(4) $y + x \geq 3$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{ (x, y) : y \leq -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{9}{2} \text{ und } y \leq 4 \cdot x \text{ und } y \geq x - 2 \text{ und } y \geq -x + 3 \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

$$\text{Rohstoffe}\quad \begin{array}{c|ccc|} & \multicolumn{3}{c}{\text{Zwischenprodukte}} \\ & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \hline R_1 & 1 & 1 & 2 \\ R_2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \text{Zwischenprodukte}\quad \begin{array}{c|ccc|} & \multicolumn{3}{c}{\text{Endprodukte}} \\ & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline Z_1 & 0 & 2 & 1 \\ Z_2 & 2 & 2 & 2 \\ Z_3 & 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Verkaufspreise $p = (p_1, p_2, p_3) = (10, 40, 20)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Verkaufserlöse entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \ldots = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix}$, Verkaufserlöse $= p \cdot E = (10, 40, 20) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 20 + 120 + 20 = 160$

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[2] (a) Bei Anwendung Gauß-Jordan-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ erhält man folgendes Schlußtableau.

$$\begin{array}{rrr|l} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \hline 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & a \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \ldots \longrightarrow \quad \begin{array}{rrr|l} x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}$$

Dabei sei a irgendeine reelle Zahl.

(i) Bestimmen Sie anhand des Schlußtableaus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems, wenn $a = 2$.

(ii) Bestimmen Sie anhand des Schlußtableaus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems im Falle $a = 0$.

(b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] (i) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte). Geprüft wird die Beherrschung der <u>Methode</u> - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

[1] (ii) Berechnen Sie die Inverse von B^T.

Ergebniskontrolle:

(a) <u>zu (i)</u>:

Wenn $a = 2$, dann ist im Schlußtableau die letzte Zeile der Koeffizientenmatrix eine Nullzeile, aber die letzte Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix ist keine Nullzeile. Also besitzt das ursprüngliche LGS keine Lösung, in Symbolen $L_b = \emptyset$.

<u>zu (ii)</u>:

Lösungsmenge im Falle $a = 0$.

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) <u>zu (i)</u>:

Ansatz: Tabellenform

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
-1	-1	2	1	0	0	I
-3	1	2	0	1	0	II
1	-1	1	0	0	1	III

Lösung: nach Durchführung des Gauß-Jordan Algorithmus

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1 \\ -5/4 & 3/4 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist die gesuchte Inverse von } B.$$

<u>zu (ii)</u>:
Es gilt $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$. Daher

$$(B^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & -5/4 & -1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 5\%$ und ein Zielwert K_x, der 50% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel $44\%, 20\%, 0\%, 20\%, 20\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{5}} \approx 1.09$, $\ln 1.05 \approx 0.05$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $121^2 = 14641$, $12^5 = 248832$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_5 = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^5 \Leftrightarrow 1 + i = (1.5)^{\frac{1}{5}} \approx 1.09 \Leftrightarrow i = 0.09 = 9\%$

(b) $K_x = 1.5 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.05)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.5)}{\ln(1.05)} \approx \frac{0.41}{0.05} = \frac{41}{5}$; $n = \lceil x \rceil = 9$

(c) $K_5 = (1.44 \cdot 1.2 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 1.2) \cdot 100000 = 144 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^5 = 248832$

$i_{\text{eff}} = (1.44 \cdot 1.2 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 1.2)^{\frac{1}{5}} - 1 = \left(1.2^5\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 1.2 - 1 = 0.2 = 20\%$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{16}} \left(2 \cdot x\right)^{4/3}$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x \to \frac{1}{16}} \left(2 \cdot x\right)^{4/3} = \ldots = \frac{1}{16}.$$

[1] (b) $\lim\limits_{x \to 0} (x+2) \cdot e^{x - \ln(2)}$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x \to 0} (x+2) \cdot e^{x - \ln(2)} = \ldots = 1$$

[1] (c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+1)^3 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1}{\left(x^2 + x + 1\right)^2 - 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1}$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x+1)^3 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1}{\left(x^2 + x + 1\right)^2 - 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1} = \ldots = \frac{8 - 3 - 3 - 1}{9 - 3 - 2 - 1} = \frac{1}{3}.$$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = \ln\big((x+1)^2+2\big)$ mit $D(f) = [-2, 1]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = \frac{2\ (x+1)}{(x+1)^2+2}$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen **Maximal**punkte (**Maximal**stellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ (x+1)}{(x+1)^2+2} = 0 \Leftrightarrow 2\ (x+1) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = -1$$

$-1 \in D(f)$ und kein Randpunkt, also $x = -1$ einzige stationäre Stelle.

Für Untersuchung, ob stationäre Stelle lokale Extremstelle ist, Berechnung von $f''(x)$

$f''(x) = \ldots = \frac{4-2\cdot(x+1)^2}{\left[(x+1)^2+2\right]^2}$

$f''(-1) = 1 > 0$, also $x = -1$ lokale Minimalstelle. Da $x = -1$ die einzige stationäre Stelle ist, existiert kein lokaler Maximalpunkt.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(-2) = \ln(3)$, $f(-1) = \ln(2)$ und $f(1) = \ln(6)$.

Da ln streng monoton wachsend ist, ergeben sich folgende Ungleichungen

$$\ln(2) < \ln(3) < \ln(6).$$

Somit erhalten wir

$\ln(2) = f(-1)$ als minimalen Wert von $f(-2), f(-1), f(1)$,
$\ln(6) = f(1)$ als maximalen Wert von $f(-2), f(-1), f(1)$.

D.h. $\big(-1, \ln(2)\big)$ ist globaler Minimalpunkt, und $\big(1, \ln(6)\big)$ ist globaler Maximalpunkt.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die stückweise stetige Funktion $f : [-0.5, 4] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{2\cdot t}} & \text{für} \quad -0.5 \le t \le 0 \\ \sqrt{t} + 3 \cdot t^2 & \text{für} \quad 0 < t \le 4 \end{cases}.$$

Für $-0.5 \le x \le 4$ sei die Funktion F definiert durch $F(x) := \int_{-0.5}^{x} f(t)\, dt$.

[2] (a) Berechnen Sie $F(0)$.

[4] (b) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in]0, 4]$.

Ergebniskontrolle:

(a) Es gilt

$$F(0) = \int_{-0.5}^{0} \frac{1}{e^{2\cdot t}}\, dt = \int_{-0.5}^{0} e^{-2\cdot t}\, dt = \ldots = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^1.$$

(b) Für $0 < x \le 4$ gilt

$$F(x) = \int_{-0.5}^{0} \frac{1}{e^{2\cdot t}}\, dt + \int_{0}^{x} (\sqrt{t} + 3 \cdot t^2)\, dt = \ldots = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^1 + \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} + x^3.$$

Thema: Partielle Ableitungen

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x, y) = \left(y^2 + 1\right) \cdot \ln(x + 1) \quad (x > 0, y > 0)$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yx}.

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x, y) = \frac{y^2+1}{x+1}$

$f''_{xx}(x, y) = -\frac{y^2+1}{(x+1)^2}$

$f'_y(x, y) = 2 \cdot y \cdot \ln(x + 1)$

$f''_{yx}(x, y) = \frac{2 \cdot y}{(x+1)}$

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x, y) = y + x^{1/2} \cdot y^{1/2}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 4$ und $y_0 = 9$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Kapitalelastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Arbeitselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Kapitaleinsatz um 2% erhöht und der Arbeitseinsatz sich um 3% vermindert.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(4, 9) = 4 \cdot \frac{f'_x(4,9)}{f(4,9)}$ und $\mathcal{E}_y^f(4, 9) = 9 \cdot \frac{f'_y(4,9)}{f(4,9)}$ mit

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \cdot y^{1/2} \text{ und } f'_y(x, y) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x^{1/2} \cdot y^{-1/2}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (4, 9)$

$$\mathcal{E}_x^f(4, 9) = \ldots = 0.2$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(4, 9) \ldots = \ldots = 0.8.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(4, 9) \cdot \frac{dx}{4} + \mathcal{E}_y^f(4, 9) \cdot \frac{dy}{9} = 0.2 \cdot 2\% + 0.8 \cdot (-3)\% = -2\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(4, 9)$ zu $f(4.08, 8.73)$ beträgt ca. -2%.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[7] Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion $f(x,y) = 3\cdot(x+1)^2+3\cdot(y+1)^2-6\cdot y+3$ eines Unternehmens in Abhängigkeit vom Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode diese Funktion auf (lokale) Extremwerte unter der Erlösbedingung
$3 \cdot x + 6 \cdot y = 42$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = 3 \cdot x + 6 \cdot y - 42 \stackrel{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = 3 \cdot (x+1)^2 + 3 \cdot (y+1)^2 - 6 \cdot y + 3 + \lambda \cdot \big(3 \cdot x + 6 \cdot y - 42\big)$
- Vorbereitung zur Bestimmung der bedingten stationären Stellen
  - $f'_x(x,y) = 6 \cdot (x+1)$ und $f'_y(x,y) = 6 \cdot y$
  - $b'_x(x,y) = 3$ und $b'_y(x,y) = 6$
  - $L'_x(x,y,\lambda) = f'_x(x,y) + \lambda \cdot b'_x(x,y) = 6 \cdot (x+1) + 3 \cdot \lambda$
  - $L'_y(x,y,\lambda) = f'_y(x,y) + \lambda \cdot b'_y(x,y) = 6 \cdot y + 6 \cdot \lambda$
  - $L'_\lambda(x,y,\lambda) = b(x,y) = 3 \cdot x + 6 \cdot y - 42$
- Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} L'_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 2 \cdot x + 2 \\ \lambda & = & -y \\ 3 \cdot x + 6 \cdot y - 42 & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 2 \cdot x + 2 \\ \lambda & = & -y \\ 15 \cdot x & = & 30 \end{array} \right\}$$

Also ist $(2, 6, -6)$ die einzige Lösung des Gleichungssystems. Außerdem $(2,6) \in D(f)$, so dass $P1 = (2,6)$ der einzige bedingt stationäre Punkt ist.

- Zur Berechnung des Wertes von $D(2, 5, -4)$
  - $f''_{xx}(x, y) = 6, f''_{yy}(x, y) = 6, f''_{xy}(x, y) = 0$
  - $b''_{xx}(x, y) = b''_{yy}(x, y) = b''_{xy}(x, y) = b''_{yx}(x, y) = 0.$
- Berechnung des Wertes von $D(2, 6, -6)$

$$D(2, 6, -6) = \ldots = 270.$$

$D(2, 6, -6) > 0$, also ist $(2, 6)$ eine lokale Minimalstelle der Gesamtkostenfunktion f unter der Nebenbedingung $3 \cdot x + 6 \cdot y = 36$ mit Funktionswert

$$f(2, 6) = \ldots = 141.$$