Mathematik für Ökonomen – SS 2023 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. Rene Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

18.07.2023, 08:00-10:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Korrekturabschnitt!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

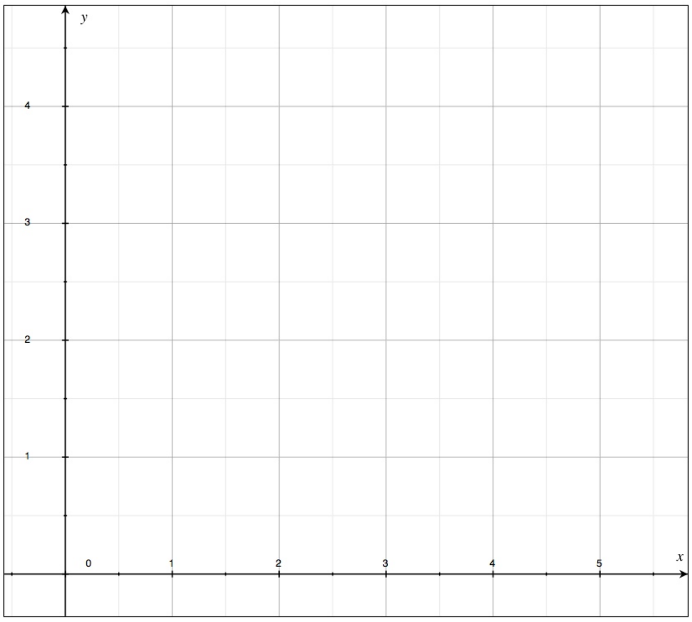
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y + x \leq 9$

(2) $2 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot y \geq 0$

(3) $y - x \geq -2$

(4) $y + x \geq 3$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

Rohstoffe	Zwischenprodukte Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	1	2
R_2	2	1	1

Zwischenprodukte	Endprodukte E_1	E_2	E_3
Z_1	0	2	1
Z_2	2	2	2
Z_3	2	0	1

Verkaufspreise $p = (p_1, p_2, p_3) = (10, 40, 20)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Verkaufserlöse entstehen hierbei?

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[2] (a) Bei Anwendung Gauß-Jordan-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ erhält man folgendes Schlußtableau.

x_1	x_2	x_3	b
3	-1	2	1
2	0	1	1
0	0	1	1
-1	1	-1	a

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \dots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	b^*
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	a

Dabei sei a irgendeine reelle Zahl.

(i) Bestimmen Sie anhand des Schlußtableaus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems, wenn $a = 2$.

(ii) Bestimmen Sie anhand des Schlußtableaus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems im Falle $a = 0$.

(b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] (i) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte). Geprüft wird die Beherrschung der <u>Methode</u> - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

[1] (ii) Berechnen Sie die Inverse von B^T.

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 5\%$ und ein Zielwert K_x, der 50% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel $44\%, 20\%, 0\%, 20\%, 20\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{5}} \approx 1.09$, $\ln 1.05 \approx 0.05$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $121^2 = 14641$, $12^5 = 248832$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{16}} \left(2 \cdot x\right)^{4/3}$

[1] (b) $\lim\limits_{x \to 0} (x+2) \cdot e^{x - \ln(2)}$

[1] (c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+1)^3 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1}{\left(x^2 + x + 1\right)^2 - 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1}$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = \ln\big((x+1)^2 + 2\big)$ mit $D(f) = [-2, 1]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = \frac{2\ (x+1)}{(x+1)^2+2}$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen **Maximal**punkte (**Maximal**stellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die stückweise stetige Funktion $f : [-0.5, 4] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{2\cdot t}} & \text{für } \; -0.5 \leq t \leq 0 \\ \sqrt{t} + 3 \cdot t^2 & \text{für } \; 0 < t \leq 4 \end{cases}.$$

Für $-0.5 \leq x \leq 4$ sei die Funktion F definiert durch $F(x) := \int_{-0.5}^{x} f(t)\; dt$.

[2] (a) Berechnen Sie $F(0)$.

[4] (b) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in]0, 4]$.

Thema: Partielle Ableitungen

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = \left(y^2+1\right) \cdot \ln(x+1) \quad (x > 0, y > 0)$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{yx}.

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x, y) = y + x^{1/2} \cdot y^{1/2}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 4$ und $y_0 = 9$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Kapitalelastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Arbeitselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Kapitaleinsatz um 2% erhöht und der Arbeitseinsatz sich um 3% vermindert.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[7] Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion $f(x,y) = 3\cdot(x+1)^2+3\cdot(y+1)^2-6\cdot y+3$ eines Unternehmens in Abhängigkeit vom Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode diese Funktion auf (lokale) Extremwerte unter der Erlösbedingung
$3 \cdot x + 6 \cdot y = 42$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$