

Klausur Mathematik für Ökonomen

18.07.2023, 08:00-10:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Handy** oder Rechner jeder Art – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe
kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum _____

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift _____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

Einträge der Klausuraufsicht:

Unterbrechungen

Abgabe

Korrekturabschnitt!

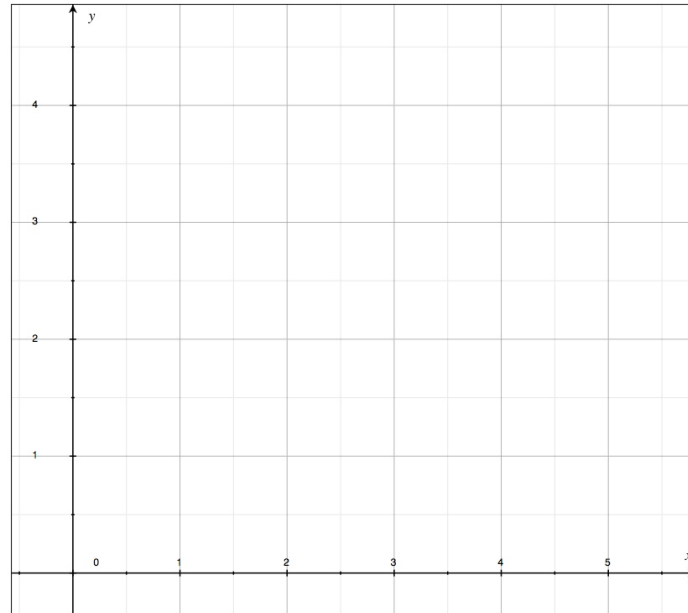
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y + x \leq 9$

(2) $2 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot y \geq 0$

(3) $y - x \geq -2$

(4) $y + x \geq 3$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Aufgabe 2

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

- [4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

		Zwischenprodukte			Endprodukte			
		Z_1	Z_2	Z_3	Z_1	Z_2	Z_3	
Rohstoffe	R_1	1	1	2	0	2	1	
	R_2	2	1	1	2	2	2	
					Z_3	2	0	1

Verkaufspreise $p = (p_1, p_2, p_3) = (10, 40, 20)$.

- (a) Berechnen Sie M_{RE} , die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

- (b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Verkaufserlöse entstehen hierbei?

Aufgabe 3

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

- [2] (a) Bei Anwendung Gauß-Jordan-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ erhält man folgendes Schlußtableau.

$$\begin{array}{ccc|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & b \\
 \hline
 3 & -1 & 2 & 1 \\
 2 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 -1 & 1 & -1 & a
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan} \dots \rightarrow}
 \begin{array}{ccc|c}
 x_1 & x_2 & x_3 & b^* \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & a
 \end{array}$$

Dabei sei a irgendeine reelle Zahl.

- (i) Bestimmen Sie anhand des Schlußtableaus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems, wenn $a = 2$.
- (ii) Bestimmen Sie anhand des Schlußtableaus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems im Falle $a = 0$.
- (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- [3] (i) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte). Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.
- [1] (ii) Berechnen Sie die Inverse von B^T .

Aufgabe 4 Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

- [2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 50% über dem Anfangswert K_0 liegt?
- [2] (b) Gegeben: $i = 5\%$ und ein Zielwert K_x , der 50% über dem Anfangswert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n = ?$
(d.h. mit der n -ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)
- [2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel 44%, 20%, 0%, 20%, 20%. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff} .

Hilfswerte: $1.5^{\frac{1}{5}} \approx 1.09$, $\ln 1.05 \approx 0.05$, $\ln 1.5 \approx 0.41$, $121^2 = 14641$, $12^5 = 248832$

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{16}} (2 \cdot x)^{4/3}$

[1] (b) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) \cdot e^{x - \ln(2)}$

[1] (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)^3 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 1}{(x^2 + x + 1)^2 - 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1}$

Gegeben $f(x) = \ln((x+1)^2 + 2)$ mit $D(f) = [-2, 1]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!

f hat die Ableitung $f'(x) = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+2}$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen **Maximal**punkte (**Maximal**stellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale Maximal- und Minimalpunkte (Maximal- bzw. Minimalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Aufgabe 7

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

Gegeben sei die stückweise stetige Funktion $f : [-0.5, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{e^{2 \cdot t}} & \text{für } -0.5 \leq t \leq 0 \\ \sqrt{t} + 3 \cdot t^2 & \text{für } 0 < t \leq 4 \end{cases}.$$

Für $-0.5 \leq x \leq 4$ sei die Funktion F definiert durch $F(x) := \int_{-0.5}^x f(t) dt$.[2] (a) Berechnen Sie $F(0)$.[4] (b) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in]0, 4]$.

Aufgabe 8 Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

- [4] Berechnen Sie für die Funktion $f(x, y) = (y^2 + 1) \cdot \ln(x + 1)$ ($x > 0, y > 0$) die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y , sowie f''_{xx}, f''_{yx} .

Aufgabe 9

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

- [5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x, y) = y + x^{1/2} \cdot y^{1/2}$ mit Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 4$ und $y_0 = 9$ vorgegeben.
- Bestimmen Sie die Kapitalelastizität \mathcal{E}_x^f und die Arbeitselastizität \mathcal{E}_y^f an der obigen Basisstelle.
 - Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Kapitaleinsatz um 2% erhöht und der Arbeitseinsatz sich um 3% vermindert.

Aufgabe 10

Bei weiterem Platzbedarf: Anhang verwenden und dann bitte darauf hinweisen

- [7] Gegeben sei die Gesamtkostenfunktion $f(x, y) = 3 \cdot (x+1)^2 + 3 \cdot (y+1)^2 - 6 \cdot y + 3$ eines Unternehmens in Abhängigkeit vom Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Untersuchen Sie durch Anwendung der Lagrange-Methode diese Funktion auf (lokale) Extremwerte unter der Erlösbedingung

$$3 \cdot x + 6 \cdot y = 42.$$

(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte). Bestimmen Sie bei Ihrem Vorgehen explizit die Lagrangefunktion

Formel für die berandete Hesse-Determinante:

$$\begin{aligned} & D(x, y, \lambda) \\ := & (f''_{xx}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x, y)) \cdot (b'_y(x, y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x, y)) \cdot b'_x(x, y) \cdot b'_y(x, y) \\ & + (f''_{yy}(x, y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x, y)) \cdot (b'_x(x, y))^2 \end{aligned}$$