Mathematik für Ökonomen – SS 2024 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

23.07.2024, 08:30-10:30 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Smartphone**, **Uhren** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Korrekturabschnitt!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $3 \cdot y - 3 \cdot x \leq 3$

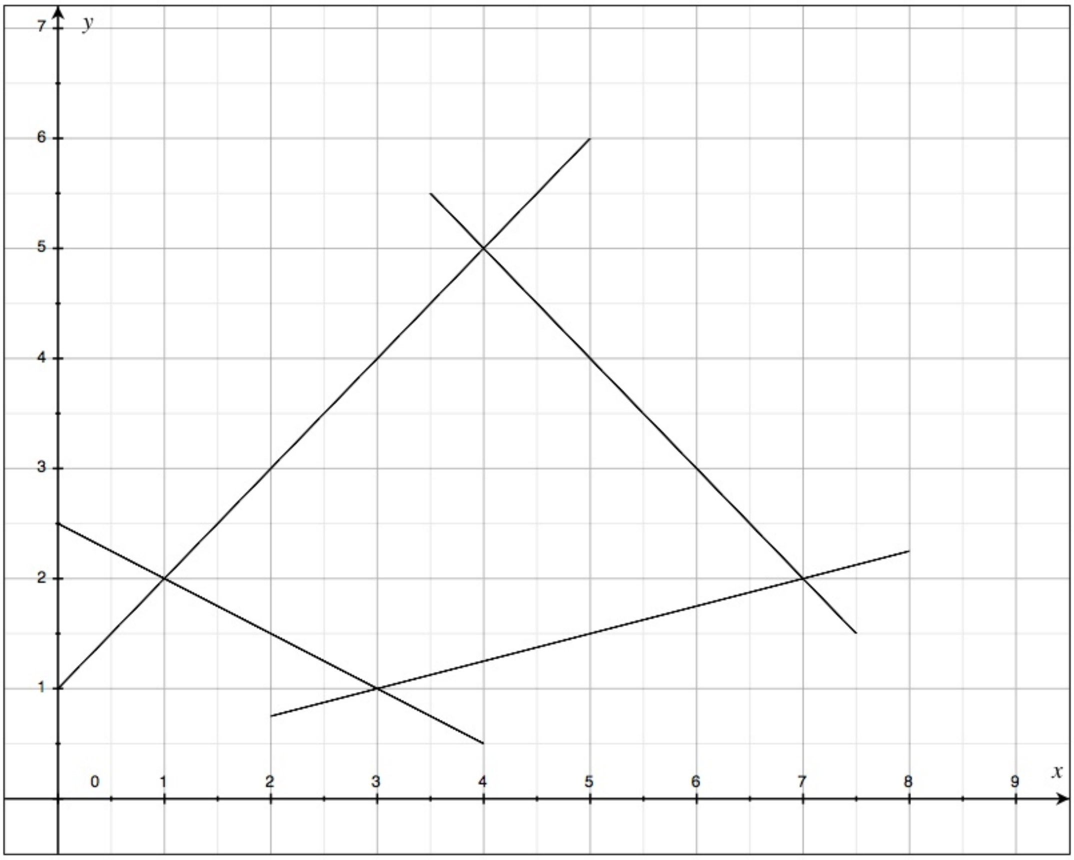
(2) $y + x \leq 9$

(3) $2 \cdot y + x \geq 5$

(4) $x - 4 \cdot y \leq -1$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 + x \text{ und } y \leq 9 - x \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \text{ und } y \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

(a) $(C \cdot B) + A$

(b) B^{-1}

Ergebniskontrolle:

(a) $C \cdot B = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 10 \\ 4 & 10 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$; $(C \cdot B) + A = \begin{pmatrix} 22 & 8 & 11 \\ 4 & 12 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3}$.

(b) Zunächst

$$B = 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{D}$$

Die Matrix D ist eine umgeordnete Einheitsmatrix, also $D^{-1} = D^T$. Dann folgt mit Rechenregeln für Inverse

$$B^{-1} = \big(2 \cdot D\big)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot D^{-1} = \frac{1}{2} \cdot D^T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge $L_{(b_1,b_2)}$ der zugehörigen Matrixgleichung $A \cdot X = (b_1, b_2)$.

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2
3	-1	2	1	-1
2	0	1	1	-1
1	1	0	1	2

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	b_1^*	b_2^*
1	0	1/2	1/2	-1/2
0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	0	0	0	3

[4] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] (i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte) die allgemeine Lösung der Matrixgleichung

$$B \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geprüft wird die Beherrschung der <u>Methode</u> - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

[1] (ii) Berechnen Sie die Inverse der Lösung der Matrixgleichung in (i).

Ergebniskontrolle:

(a) Im Schlußtableau ist die letzte Zeile der Koeffizientenmatrix eine Nullzeile, aber die letzte Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix ist keine Nullzeile. Also besitzt das ursprüngliche LGS keine Lösung, in Symbolen $L_{(b_1,b_2)} = \emptyset$.

(b)

<u>zu (i)</u>:

Ansatz: Tabellenform

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
-1	-3	1	1	0	0	I
-1	1	-1	0	1	0	II
2	2	1	0	0	1	III

Lösung: nach Anwendung des Gauß-Jordan Algorithmus

Lösungsmatrix:

$$X = \begin{pmatrix} -3/4 & -5/4 & -1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zu (ii):

Die Lösung X der Matrixgleichung in (i) entspricht der Inversen B^{-1} von B, also ergibt sich aus Rechenregeln für Inverse $X^{-1} = \left(B^{-1}\right)^{-1} = B$.

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 15% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 15% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel $44\%, 0\%, 20\%, 44\%, 0\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.15^{\frac{1}{5}} \approx 1.03$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.15 \approx 0.14$, $12^5 = 248832$, $\ln 1.1 \approx 0.1$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_5 = 1.15 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^5 \Leftrightarrow 1 + i = (1.15)^{\frac{1}{5}} \approx 1.03 \Leftrightarrow i = 0.03 = 3\%$

(b) $K_x = 1.15 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.15)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.14}{0.1} = \frac{14}{10}$; $n = \lceil x \rceil = 2$

(c) $K_5 = (1.44 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 1.44 \cdot 1) \cdot 100000 = (1.2)^5 \cdot 10^5 = 12^5 = 248832$

$i_{\text{eff}} = (1.44 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 1.44 \cdot 1)^{\frac{1}{5}} - 1 = \left(1.2^5\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 1.2 - 1 = 0.2 = 20\%$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\ln(5)+x} - x - 4\right)$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{\ln(5)+x} - x - 4\right) = \ldots = 1.$$

[2] (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot x^3 + x + 1}{6\cdot x^4 - 15\cdot x^2 + 8\cdot x - 1}$

Ergebniskontrolle:

Ansatz: Ausklammern der höchsten Nennerpotenz

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot x^3 + x + 1}{6\cdot x^4 - 15\cdot x^2 + 8\cdot x - 1} = \ldots = \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot x^{-1} + x^{-3} + x^{-4}}{6 - 15\cdot x^{-2} + 8\cdot x^{-3} - x^{-4}} = \frac{0}{6} = 0.$$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = (x{+}1)^2{\cdot}\ln(x{+}1){-}(x{+}1)^2$ mit $D(f) = [0, e^1{-}1]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = (x+1) \cdot (2 \cdot \ln(x+1) - 1)$.

[5](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Extremalpunkte (Extremalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot (2 \cdot \ln(x+1) - 1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{oder} \quad 2 \cdot \ln(x+1) - 1 = 0$$
$$\dots$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{oder} \quad x = e^{1/2} - 1$$

$-1 \notin D(f)$, und $1 = e^0 < e^{1/2} < e^1$, weil Exponentialfunktion streng monoton wachsend. Also $0 < e^{1/2} - 1 < e^1 - 1$, weswegen $e^{1/2} - 1 \in D(f)$ kein Randpunkt. Daher $x = e^{1/2} - 1$ einzige stationäre Stelle.

Für Untersuchung, ob stationäre Stelle lokale Extremstelle ist, Berechnung von $f''(x)$

$f''(x) = \ldots = 2 \cdot \ln(x+1) + 1$

$f''(e^{1/2} - 1) = \ldots = 2 > 0$. Also $x = e^{1/2} - 1$ lokale Minimalstelle mit Funktionswert $f(e^{1/2} - 1) = \ldots = -\frac{1}{2} \cdot e^1$.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale **Maximal**punkte (**Maximal**stellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(0) = \ldots = -1$, $f(e^1 - 1) = \ldots = 0$.

Da die Exponentialfunktion nur positive Werte besitzt, ergibt sich für den Funktionswert in der stationären Stelle: $f(e^{1/2} - 1) = -\frac{1}{2} \cdot e^1 < 0 = f(e^1 - 1)$.
Außerdem $f(0) = -1 < 0 = f(e^1 - 1)$. Insgesamt erhält man daher $\big(e^1 - 1, 0\big)$ als globalen Maximalpunkt.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die Funktion $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}} & \text{für } \ 1 \leq t \leq 4 \\ e^{2 \cdot t} & \text{für } \ 4 < t \leq 5 \end{cases}.$$

Für $1 \leq x \leq 5$ sei $F(x) := \int_1^x f(t)\ dt$.

[5] (a) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in [1,5]$.

[1] (b) Berechnen Sie $F\left(\dfrac{9}{4}\right)$.

Ergebniskontrolle:

(a) Für $1 \leq x \leq 4$ gilt

$$F(x) = \int_1^x t^{-1/2}\ dt = \ldots = 2 \cdot x^{1/2} - 2.$$

Für $4 < x \leq 5$ gilt

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^4 t^{-1/2}\ dt + \int_4^x e^{2 \cdot t}\ dt = F(4) + \left[\frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot t}\right]_4^x = \ldots = 2 + \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot x} - \frac{1}{2} \cdot e^8.$$

(b) $\frac{9}{4} \in]1,4[$, also nach a)

$$F\left(\frac{9}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{1/2} - 2 = 2 \cdot \frac{3}{2} - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Thema: Partielle Ableitungen

[4] Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = e^{2\cdot x^2+3\cdot y} \quad (x,y \in \mathbb{R})$ die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{xy}.

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x,y) = 4 \cdot x \cdot e^{2\cdot x^2+3\cdot y}$$

$$f''_{xx}(x,y) = \ldots = 4 \cdot e^{2\cdot x^2+3\cdot y} + 16 \cdot x^2 \cdot e^{2\cdot x^2+3\cdot y}$$

$$f'_y(x,y) = 3 \cdot e^{2\cdot x^2+3\cdot y}$$

$$f''_{xy}(x,y) = \ldots = 12 \cdot x \cdot e^{2\cdot x^2+3\cdot y}$$

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Produktionsfunktion $f(x,y) = 100 \cdot x^{1/4} \cdot e^{y^2}$ eines Produktes in Abhängigkeit vom Kapitaleinsatz $x > 0$ und Arbeitseinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 50$ und $y_0 = 2$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Kapitalelastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Arbeitselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Kapitaleinsatz um 20% erhöht und der Arbeitseinsatz um 1% verringert.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(50,2) = 50 \cdot \dfrac{f'_x(50,2)}{f(50,2)}$ und $\mathcal{E}_y^f(50,2) = 2 \cdot \dfrac{f'_y(50,2)}{f(50,2)}$ mit

$$f'_x(x,y) = 25 \cdot x^{-3/4} \cdot e^{y^2} \text{ und } f'_y(x,y) = 200 \cdot x^{1/4} \cdot e^{y^2} \cdot y.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (50,2)$

$$\mathcal{E}_x^f(50,2) = \ldots = \frac{1}{4}$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(50,2) = \ldots = 8.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(50,2) \cdot \frac{dx}{50} + \mathcal{E}_y^f(50,2) \cdot \frac{dy}{2} = \frac{1}{4} \cdot 20\% - 8 \cdot 1\% = 5\% - 8\% = -3\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(50,2)$ zu $f(60, 1.98)$ beträgt ca. -3%.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[6] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 2 \cdot x^2 - 8 \cdot x \cdot y + y^4 + 16 \qquad (x < 4, y > -5)$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x,y) = 4 \cdot x - 8 \cdot y$
$f'_y(x,y) = -8 \cdot x + 4 \cdot y^3$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f'_x(x,y) & = & 0 \\ f'_y(x,y) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \ldots \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 2 \cdot y \\ y \cdot (y^2 - 4) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2 \cdot y \\ y & = & 0 \quad \text{oder} \quad y^2 = 4 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2 \cdot y \\ y & = & 0 \quad \text{oder} \quad y = -2 \quad \text{oder} \quad y = 2 \end{array} \right\}$$

$(-4,-2), (0,0) \in D(f)$ und $(4,2) \notin D(f)$. Also sind $P1 = (-4,-2), P2 = (0,0)$ die stationären Punkte

Zur Berechnung der Werte von $H_D(x,y) = f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0):

$f''_{xx}(x,y) = 4$
$f''_{yy}(x,y) = 12 \cdot y^2$
$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = -8$

- $H_D(-4,-2) = \ldots = 128 > 0$ und $f''_{xx}(-4,-2) = 4 > 0 \Rightarrow (-4,-2)$ ist eine lokale Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(-4,-2) = \ldots = 0$.
- $H_D(0,0) = \ldots = -64 < 0 \Rightarrow (0,0)$ ist eine Sattelpunktstelle von f mit Funktionswert $f(0,0) = \ldots = 16$.