Mathematik für Ökonomen – SS 2025 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. R. Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

22.07.2025, 09:00-11:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Smartphone**, **Uhren** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Korrekturabschnitt!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $3 \cdot y \quad - \quad 3 \cdot x \quad \leq \quad 3$

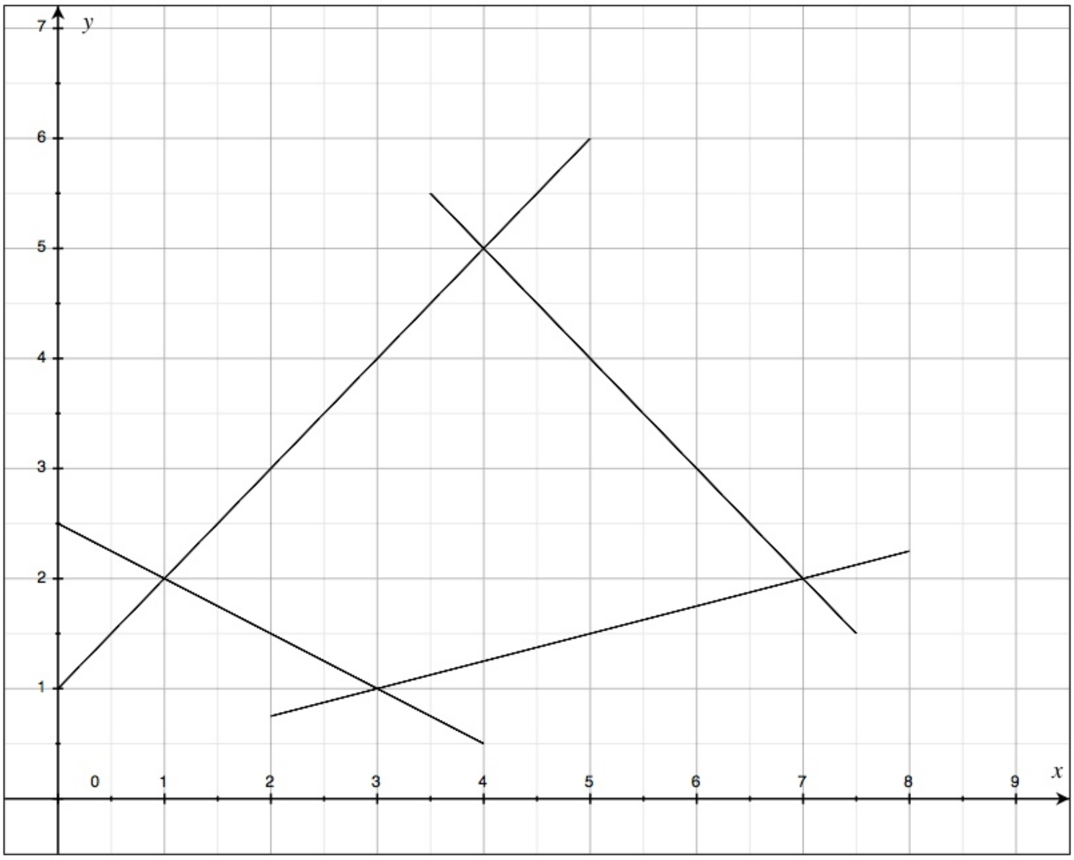
(2) $y + x \leq 9$

(3) $2 \cdot y \ + \ x \geq \ 5$

(4) $x - 4 \cdot y \leq \ -1$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 + x \text{ und } y \leq 9 - x \text{ und } y \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot x \text{ und } y \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot x \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(a) $(B \cdot A) + C$

(b) C^{-1}

Ergebniskontrolle:

(a) $(B \cdot A) + C = \ldots = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3}$.

(b) Die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist eine Diagonalmatrix, deren Hauptdiagonalelemente alle verschienden von Null sind. Daher existiert eine Inverse C^{-1} von C, die wieder eine Diagonalmatrix ist, sie besitzt folgende Gestalt

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge $L_{(b_1,b_2)}$ der zugehörigen Matrixgleichung $A \cdot X = (b_1, b_2)$.

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2
3	-1	2	1	-1
4	0	2	2	-2
5	5	0	5	10

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	b_1^*	b_2^*
1	0	1/2	1/2	-1/2
0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	0	0	0	15

[4] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] (i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte) die Inverse B^{-1} von B. Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

[1] (ii) Berechnen Sie die Inverse der Matrix B^T.

Ergebniskontrolle:

(a) Im Schlußtableau ist die letzte Zeile der Koeffizientenmatrix eine Nullzeile, aber die letzte Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix ist keine Nullzeile. Also besitzt das ursprüngliche LGS keine Lösung, in Symbolen $L_{(b_1,b_2)} = \emptyset$.

(b)

zu (i):

Ansatz: Tabellenform

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
-1	-3	1	1	0	0	I
-1	1	-1	0	1	0	II
2	2	1	0	0	1	III

Lösung: Nach Anwendung des Gauß-Jordan Algorithmus

Lösungsmatrix:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & -5/4 & -1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zu (ii):

Für die Inverse $\left(B^T\right)^{-1}$ von B^T gilt $\left(B^T\right)^{-1} = \left(B^{-1}\right)^T$. Daher

$$\left(B^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 1 \\ -5/4 & 3/4 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 20% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 20% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel $44\%, 0\%, 20\%, 44\%, 0\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.2^{\frac{1}{5}} \approx 1.04$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, , $12^5 = 248832$, $11^5 = 161051$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_5 = 1.2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^5 \Leftrightarrow 1 + i = (1.2)^{\frac{1}{5}} \approx 1.04 \Leftrightarrow i = 0.04 = 4\%$

(b) $K_x = 1.2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.2)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.18}{0.1} = \frac{18}{10}$; $n = \lceil x \rceil = 2$

(c) $K_5 = (1.44 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 1.44 \cdot 1) \cdot 100000 = (1.2)^5 \cdot 10^5 = 12^5 = 248832$

$i_{\text{eff}} = (1.44 \cdot 1 \cdot 1.2 \cdot 1.44 \cdot 1)^{\frac{1}{5}} - 1 = \left(1.2^5\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 1.2 - 1 = 0.2 = 20\%$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim\limits_{x\to -2} \big(\ln\big(e^3 + x + 2\big) - 4\big)$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x\to -2} \big(\ln\big(e^3 + x + 2\big) - 4\big) = \ln\big(e^3\big) - 4 = 3 - 4 = -1.$$

[1] (b) $\lim\limits_{x\to -2} 5 \cdot \big(4 \cdot x\big)^{1/3}$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x\to -2} 5 \cdot \big(4 \cdot x\big)^{1/3} = 5 \cdot \big(4 \cdot (-2)\big)^{1/3} = 5 \cdot \big(-8\big)^{1/3} = 5 \cdot (-1)^{1/3} \cdot 8^{1/3} = 5 \cdot (-1) \cdot 2 = -10.$$

[1] (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{3/2}$

Ergebniskontrolle:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{3/2} = \lim_{x\to\infty} x^{-3/2} = 0.$$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = \frac{(4-x^2)^3}{6}$ mit $D(f) = [-2, 1]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = -x \cdot (4 - x^2)^2$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Extremalpunkte (Extremalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

Zunächst Bestimmung der stationären Stellen von $f(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x \cdot (4 - x^2)^2 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -2 \quad \text{oder} \quad x = 2$$

$2 \notin D(f)$, $-2 \in D(f)$ aber Randpunkt, und $0 \in D(f)$ kein Randpunkt. Daher $x = 0$ einzige stationäre Stelle.

Für Untersuchung, ob stationäre Stelle lokale Extremstelle ist, Berechnung von $f''(x)$

$f''(x) = \ldots = -(4 - x^2)^2 + 4 \cdot x^2 \cdot (4 - x^2)$.

$f''(0) = \ldots = -16 < 0$. Also ist $x = 0$ eine lokale Maximalstelle mit Funktionswert $f(0) = \ldots = \frac{32}{3}$.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale Extrempunkte (Extremstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f(-2) = 0$, $f(1) = \ldots = \frac{9}{2}$. Vergleich mit lokaler Maximalstelle aus (a) ergibt $(-2, 0)$ als globalen Minimalpunkt und $(0, 32/3)$ als globalen Maximalpunkt.

[1](c) Bestimmen Sie den globalen Maximalpunkt der Funktion $g(x) = -f(x)$ über dem Definitionsbereich $D(g) = D(f) = [-2, 1]$ (bitte mit Begründung).

Ergebniskontrolle:

Nach (ii) gilt $f(x) \geq 0 = f(-2)$ für alle $x \in [-2, 1]$, also $-f(x) \leq 0 = -f(-2)$ für alle $x \in [-2, 1]$. D.h. $(-2, 0)$ ist globaler Maximalpunkt von g.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die Funktion $F : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_1^x e^{-0.25 \cdot t + 0.25}\, dt$.

[3] (a) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in [1, \infty[$.

[2] (b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_1^\infty e^{-0.25 \cdot t + 0.25}\, dt$.

Ergebniskontrolle:

(a) Für $x \in [1, \infty[$ gilt

$$F(x) = \int_1^x e^{-0.25 \cdot t} \cdot e^{0.25}\, dt = \ldots = 4 - 4 \cdot e^{-0.25 \cdot x + 0.25}.$$

(b) Es gilt

$$\int_1^\infty e^{-0.25 \cdot t + 0.25}\, dt = \lim_{x \to \infty} \int_1^x e^{-0.25 \cdot t + 0.25}\, dt = \ldots = 4.$$

Thema: Partielle Ableitungen

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = \left(\frac{3}{4} \cdot x^{1/2} + \frac{1}{4} \ \cdot y^{1/2}\right)^2$ $(x > 0, y > 0)$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{xy}.

Ergebniskontrolle:

$$f'_x(x,y) = \ldots = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} \cdot x^{-1/2} \cdot y^{1/2}$$

$$f'_y(x,y) = \ldots = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} \cdot x^{1/2} \cdot y^{-1/2}$$

$$f''_{xx}(x,y) = \ldots = -\frac{3}{32} \cdot x^{-3/2} \cdot y^{1/2}$$

$$f''_{xy}(x,y) = \ldots = \frac{3}{32} \cdot x^{-1/2} \cdot y^{-1/2}$$

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Ertragsfunktion $f(x,y) = (1+x) \cdot y \cdot e^{y-x}$ eines Produktes in Abhängkeit von Rohstoffkosten $x > 0$ und vom Kapitaleinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 4$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Rohstoffkostenelastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Kapitalelastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn dort die Rohstoffkosten um 2% steigen und der Kapitaleinsatz sich um 0.5% erhöht.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(4,10) = 4 \cdot \dfrac{f'_x(4,10)}{f(4,10)}$ und $\mathcal{E}_y^f(4,10) = 10 \cdot \dfrac{f'_y(4,10)}{f(4,10)}$ mit

$$f'_x(x,y) = \ldots = y \cdot e^{y-x} - (1+x) \cdot y\ e^{y-x},$$
$$f'_y(x,y) = (1+x) \cdot e^{y-x} + (1+x) \cdot y\ e^{y-x}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (4, 10)$

$$\mathcal{E}_x^f(4,10) = \ldots = -\frac{16}{5}$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(4,10) = \ldots = 11.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(4,10) \cdot \frac{dx}{4} + \mathcal{E}_y^f(4,10) \cdot \frac{dy}{10} = \ldots = -0.9\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(4,10)$ zu $f(4.08, 10.05)$ beträgt ca. -0.9%.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[7] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = e^{x^2} \cdot \big((y+1)^2 - 1\big) \qquad (-1 < x < 1, -2 < y < 1)$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelpunktstellen und die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle:
$f'_x(x,y) = 2 \cdot x \cdot e^{x^2} \cdot \big((y+1)^2 - 1\big)$
$f'_y(x,y) = 2 \cdot (y+1) \cdot e^{x^2}$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'_x(x,y) & = & 0 \\ f'_y(x,y) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2 \cdot x \cdot e^{x^2} & = & 0 \\ y & = & -1 \end{array} \right\}$$

Also $P1 = (0,-1)$ einzige Lösung. Da $(0,-1) \in D(f)$, so ist $P1 = (0,-1)$ der einzige stationäre Punkt.

Zur Berechnung der Werte von $H_D(x,y) = f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2$ für den stationären Punkt $(0,-1)$:

$f''_{xx}(x,y) = \ldots = 2 \cdot e^{x^2} \cdot \big((y+1)^2 - 1\big) + 4 \cdot x^2 \cdot e^{x^2} \cdot \big((y+1)^2 - 1\big)$
$f''_{yy}(x,y) = 2 \cdot e^{x^2}$
$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = \ldots = 4 \cdot x \cdot e^{x^2} \cdot (y+1)$

- $H_D(0,-1) = \ldots = -4 < 0 \Rightarrow (0,-1)$ ist eine Sattelpunktstelle von f mit Funktionswert $f(0,-1) = e^0 \cdot (0^2 - 1) = -1$.