Mathematik für Ökonomen – SS 2025 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. R. Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

22.07.2025, 09:00-11:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Smartphone**, **Uhren** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **10 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer
Matrikelnummer
Name
Vorname
Geburtsdatum ________________

Ich habe obige Punkte gelesen.
Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift ____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

____

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Korrekturabschnitt!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

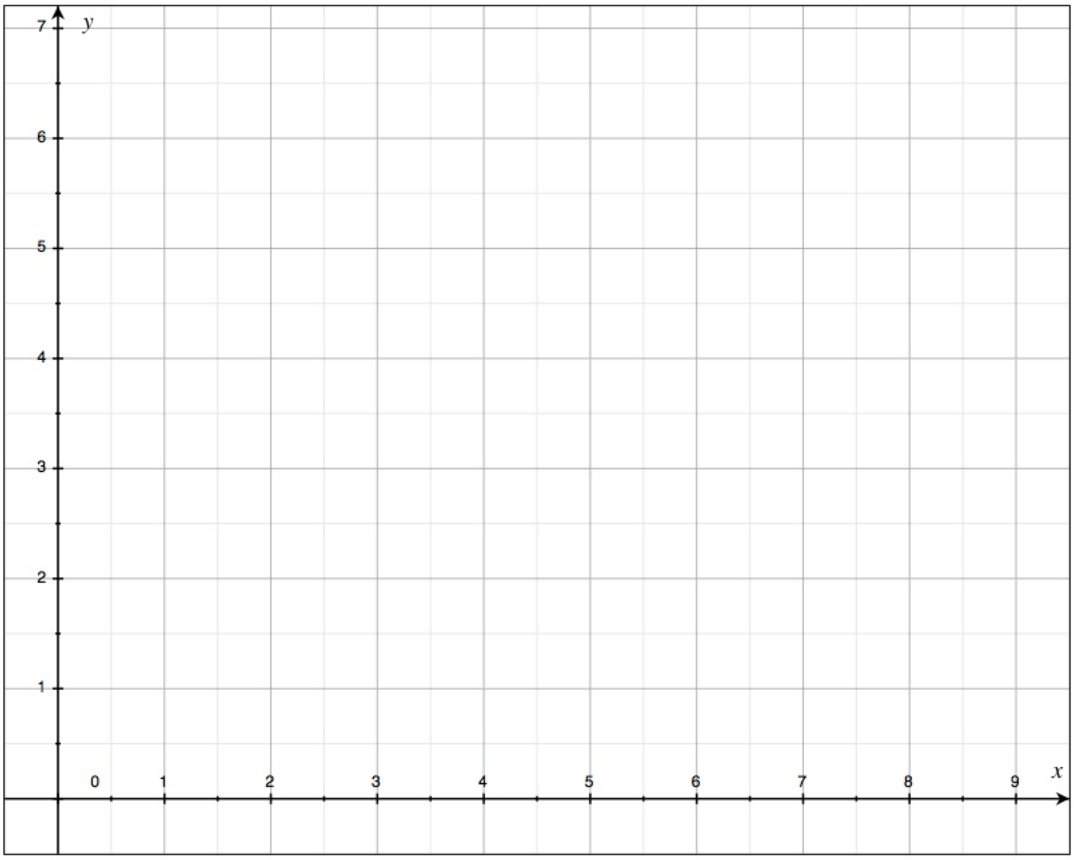
[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $3 \cdot y \; - \; 3 \cdot x \; \leq \; 3$

(2) $y + x \leq 9$

(3) $2 \cdot y \; + \; x \geq \; 5$

(4) $x - 4 \cdot y \leq \; -1$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(a) $(B \cdot A) + C$

(b) C^{-1}

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge $L_{(b_1,b_2)}$ der zugehörigen Matrixgleichung $A \cdot X = (b_1, b_2)$.

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2
3	-1	2	1	-1
4	0	2	2	-2
5	5	0	5	10

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	b_1^*	b_2^*
1	0	1/2	1/2	-1/2
0	1	-1/2	1/2	-1/2
0	0	0	0	15

[4] (b) Gegeben sei die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] (i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (<u>tabellarisch</u>, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte) die Inverse B^{-1} von B. Geprüft wird die Beherrschung der <u>Methode</u> - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

[1] (ii) Berechnen Sie die Inverse der Matrix B^T.

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 20% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 20% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel $44\%, 0\%, 20\%, 44\%, 0\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.2^{\frac{1}{5}} \approx 1.04$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, , $12^5 = 248832$, $11^5 = 161051$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

[1] (a) $\lim_{x \to -2} \left(\ln\left(e^3 + x + 2\right) - 4\right)$

[1] (b) $\lim_{x \to -2} 5 \cdot \left(4 \cdot x\right)^{1/3}$

[1] (c) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{3/2}$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = \frac{(4-x^2)^3}{6}$ mit $D(f) = [-2, 1]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = -x \cdot (4 - x^2)^2$.

[4](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Extremalpunkte (Extremalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[2](b) Untersuchen Sie auf globale Extrempunkte (Extremstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

[1](c) Bestimmen Sie den globalen Maximalpunkt der Funktion $g(x) = -f(x)$ über dem Definitionsbereich $D(g) = D(f) = [-2, 1]$ (bitte mit Begründung).

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die Funktion $F : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_1^x e^{-0.25 \cdot t + 0.25}\ dt$.

[3] (a) Berechnen Sie $F(x)$ für $x \in [1, \infty[$.

[2] (b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_1^\infty e^{-0.25 \cdot t + 0.25}\ dt$.

Thema: Partielle Ableitungen

[4] Berechnen Sie für die Funkion $f(x,y) = \left(\frac{3}{4} \cdot x^{1/2} + \frac{1}{4} \cdot y^{1/2}\right)^2$ $(x > 0, y > 0)$
die partiellen Ableitungen f'_x, f'_y, sowie f''_{xx}, f''_{xy}.

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Ertragsfunktion $f(x, y) = (1 + x) \cdot y \cdot e^{y-x}$ eines Produktes in Abhängkeit von Rohstoffkosten $x > 0$ und vom Kapitaleinsatz $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 4$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Rohstoffkostenelastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Kapitalelastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn dort die Rohstoffkosten um 2% steigen und der Kapitaleinsatz sich um 0.5% erhöht.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[7] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = e^{x^2} \cdot \big((y+1)^2 - 1\big) \qquad (-1 < x < 1, -2 < y < 1)$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremal<u>stellen</u>, Sattelpunkt<u>stellen</u> und die zugehörigen Funktionswerte)