Mathematik für Ökonomen – SS 2026 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer/Dr. Rene Simon, Fakultät für Mathematik

Klausur Mathematik für Ökonomen

28.07.2026, 09:00-11:00 Uhr (120 Minuten)

- Erlaubte **Hilfsmittel**: Nur reine Schreib- und Zeichengeräte.
  Der Einsatz anderer Hilfsmittel – so z.B. schriftliche Unterlagen, elektronische Geräte wie **Smartphone**, **Uhren** oder **Rechner jeder Art** – wird ohne genauere Prüfung der tatsächlichen Verwendung als Täuschungsversuch gewertet.
- Die Klausur muss **geheftet** bleiben.
- Bei **Klausurunterbrechung** müssen die Klausur und ein Ausweis bei der Aufsicht hinterlegt werden. Eine (gehäufte) vorzeitige Abgabe stört. In den letzten 30 Minuten ist daher **keine vorzeitige Abgabe** möglich.
- Während der Klausur können **keine Fragen** zu den Aufgaben gestellt werden, die Aufgabenstellung entspricht genau der frühzeitig angekündigten und geübten Form.

Die Klausur besteht aus **8 Aufgaben**,
dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar.
Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden, **gutes Gelingen!**

Platznummer

Matrikelnummer

Name

Vorname

Geburtsdatum _____

Ich habe obige Punkte gelesen.

Meine Personendaten habe ich korrekt angegeben:

Unterschrift _____

NUR für Teilnehmer im DRITTEN Versuch, die eine frühzeitige Bestehensbenachrichtigung wünschen.
Direkte eMail-Adresse (bitte gut lesbar):

Einträge der Klausuraufsicht: Unterbrechungen Abgabe

Korrekturabschnitt!

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y + x \leq 9$

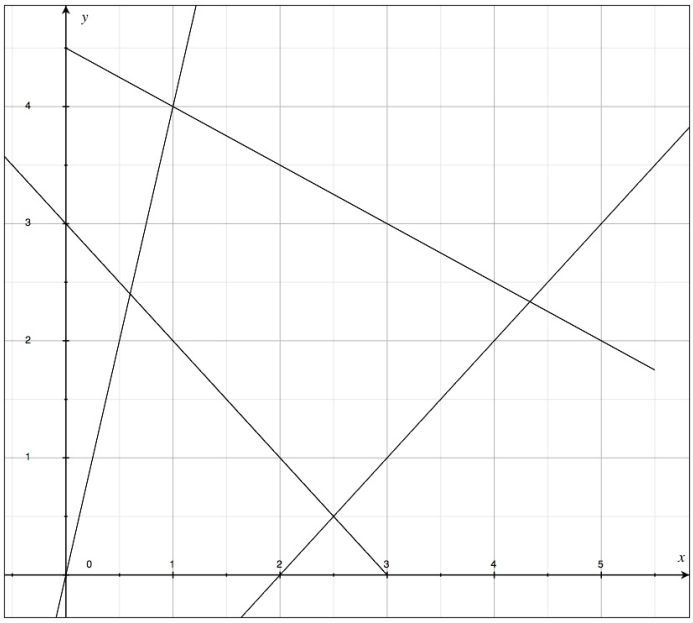
(2) $y - 4 \cdot x \leq 0$

(3) $y - x \geq -2$

(4) $y + x \geq 3$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{9}{2} \text{ und } y \leq 4 \cdot x \text{ und } y \geq x - 2 \text{ und } y \geq -x + 3 \right\}$$



(Ersatzvorlage siehe Anhang)

Thema: Rechnen mit Matrizen

[5] Führen Sie die folgenden Matrixoperationen aus („nicht definiert“ ist ggf. auch ein Ergebnis, in diesem Fall ist eine Begründung erforderlich). Hierbei ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & -15 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

(a) $A^T \cdot (B + A)$

(b) C^{-1}

(c) $(C^T)^{-1}$

Ergebniskontrolle:

(a) $A^T \cdot (B + A) = \ldots = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 13 \\ 4 & 10 & 10 \\ 6 & 5 & 12 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

(b) C^{-1} ist nicht definiert, denn die dritte Zeile von C ist zweimal die erste Zeile von C!

(c) $(C^T)^{-1}$ ist nicht definiert, da C^{-1} nicht definiert ist; alternative Begründung: die dritte Spalte von C^T ist zweimal die erste Spalte von C^T.

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan-Algorithmus

[3] (a) Bei der Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ erhält man folgendes Schlußtableau.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
3	3	3	3	12
2	3	2	1	5
4	5	4	3	13

$\xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	b^*
1	0	1	2	7
0	1	0	-1	-3
0	0	0	0	0

(i) Bestimmen Sie aus dem Schlußtableau die Lösungsmenge L_b des linearen Gleichungssystems.

(ii) Bestimmen Sie die Werte von x_3 und x_4, so dass Sie einen Lösungsvektor $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ des linearen Gleichungssystems erhalten mit $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$.

[5] (b) Gegeben sei die folgende Matrixgleichung, wobei Y unbekannt ist:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot Y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{B}$$

(i) Welche Dimension besitzt Y?

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des GJ-Algorithmus die allgemeine Lösung für Y.

Ergebniskontrolle:

(a) zu (i):

Beim LGS $A \cdot x = b$ sind zwei Variablen frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 7 & - & x_3 & - & 2 \cdot x_4 \\ x_2 & = & -3 & & & + & x_4 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & & & \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & & & \end{array} \right\}$$

zu (ii):

Ansatz, um Lösungsvektor $(2, -1, x_3, x_4)^T$ zu finden:

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & 7 - x_3 - 2 \cdot x_4 \\ -1 & = & -3 + x_4 \end{array}$$

lösen. Es ergibt sich, dass $x_3 = 1$ und $x_4 = 2$ gewählt werden muß, um einen Lösungsvektor $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ mit $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$ zu erhalten.

(b) zu (i):

$A_{3\times3} \cdot Y_{m\times n} = B_{3\times2}$, also $m = 3$ und $n = 2$.

zu (ii):

Ansatz: Tabellenform

x_1	x_2	x_3	b_1	b_2	Protokoll
1	2	1	0	-1	I
2	1	5	1	1	II
-1	1	- 4	- 1	- 2	III

Lösung: Nach Anwendung des Gauß-Jordan Algorithmus

allgemeine Lösungsmatrix:

$$Y = \begin{pmatrix} (2/3 - 3 \cdot a) & (1 - 3 \cdot b) \\ (-1/3 + a) & (-1 + b) \\ a & b \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ frei wählbar.}$$

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 5$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_5 um 20% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 20% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =?$
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 5$ und Zinsstaffel $10\%, 0\%, 10\%, 21\%, 10\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_5 bei einem Anfangswert von $K_0 = 100000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.2^{\frac{1}{5}} \approx 1.04$, $\ln 1.25 \approx 0.22$, $\ln 1.2 \approx 0.18$, $11^5 = 161051$, $\ln 1.1 \approx 0.1$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_5 = 1.2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^5 \Leftrightarrow 1 + i = (1.2)^{\frac{1}{5}} \approx 1.04 \Leftrightarrow i = 0.04 = 4\%$

(b) $K_x = 1.2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.2)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.18}{0.1} = \frac{18}{10}$; $n = \lceil x \rceil = 2$

(c) $K_5 = (1.1 \cdot 1 \cdot 1.1 \cdot 1.21 \cdot 1.1) \cdot 100000 = (1.1)^5 \cdot 10^5 = 11^5 = 161051$

$i_{\text{eff}} = (1.1 \cdot 1 \cdot 1.1 \cdot 1.21 \cdot 1.1)^{\frac{1}{5}} - 1 = \left(1.1^5\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 1.1 - 1 = 0.1 = 10\%$

Thema: Optimierungsaufgaben mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = \left(2 \cdot x^2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\ln(4 \cdot x^2 + 1) - \ln(2)\right) - \left(2 \cdot x^2 + \frac{1}{2}\right)$ mit $D(f) = [-1/2, 1/2]$.

Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!

f hat die Ableitung $f'(x) = 4 \cdot x \cdot \ln\left(2 \cdot x^2 + \frac{1}{2}\right)$.

[5](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Extrempunkte (Extremalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot x \cdot \ln\left(2 \cdot x^2 + 1/2\right) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = -1/2 \text{ oder } x = 1/2$$

$-1/2, 1/2 \in D(f)$ aber Randpunkte, und $0 \in D(f)$ kein Randpunkt. Also ist $x = 0$ die einzige stationäre Stelle von f.

Für Untersuchung, ob stationäre Stelle ein lokale Extremstelle ist, Berechnung von $f''(x)$

$f''(x) = \ldots = 4 \cdot \ln\left(2\ x^2 + 1/2\right) + \frac{16 \cdot x^2}{2 \cdot x^2 + 1/2}$

$f''(0) = 4 \cdot \ln(1/2) < 0$, da $\ln(1/2) < \ln(1) = 0$.

Daher $(0, f(0)$ lokaler Maximalpunkt mit $f(0) = -1/2 \cdot \ln(2) - 1/2$.

[2](b) Untersuchen Sie auf globales Extrempunkte (globale Extremstellen und Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich $D(f)$.

Ergebniskontrolle:

$f(-1/2) = \ldots = -1$

$f(1/2) = \ldots = -1$

$\ln(2) < \ln(e) = 1$, also

$f(0) = -1/2 \cdot \ln(2) - 1/2 > -1/2 \cdot 1 - 1/2 = -1 = f(-1/2) = f(1/2)$.

Daher $(-1/2, -1), (1/2, -1)$ globale Minimalpunkte, $\left(0, -1/2 \cdot \ln(2) - 1/2\right)$ globaler Maximalpunkt.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

Gegeben sei die stückweise stetige Funktion $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} 6 \cdot t^2 + 4 \cdot t + 3 & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{1}{t^2} & \text{für } t > 2 \end{cases} .$$

Für $x \in [0, \infty[$ sei die Funktion F definiert durch $F(x) := \int_0^x f(t)\ dt$.

[3] (a) Berechnen Sie $F(2)$.

[3] (b) Berechnen Sie $F(x)$ für $x > 2$.

[2] (c) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t)\ dt$.

Ergebniskontrolle:

(a) Es gilt

$$F(2) = \int_0^2 (6 \cdot t^2 + 4 \cdot t + 3)\ dt = \ldots = 30.$$

(b) Es gilt für $x > 2$

$$F(x) = \int_0^2 (6 \cdot t^2 + 4 \cdot t + 3)\ dt + \int_2^x t^{-2}\ dt = F(2) + \int_2^x t^{-2}\ dt = \ldots = 30,5 - x^{-1}.$$

(c) Es gilt mit Teil (b)

$$\int_0^\infty f(t)\ dt = \lim_{x \to \infty} \int_0^x f(t)\ dt = \lim_{x \to \infty} F(x) = \ldots = 30,5.$$

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Die Gesamtnachfrage eines Gutes im EU-Wirtschaftsraum sei modelliert durch die Funktion $f(x,y) = 10 \cdot x^3 \cdot y^{-2}$ mit mittlerem Einkommen $x > 0$ und Preis $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 10$ und $y_0 = 40$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Einkommenselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Preiselastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Preis um 1% erhöht und das mittlere Einkommen um 2% vermindert.

Ergebniskontrolle:

(a) $\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) = x_0 \cdot \frac{f'_x(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ und $\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}$ mit

$$f'_x(x,y) = 30 \cdot x^2 \cdot y^{-2} \text{ und } f'_y(x,y) = -20 \cdot x^3 \cdot y^{-3}.$$

Also gilt an der Basisstelle $(x_0, y_0) = (10, 40)$

$$\mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) = \ldots = 3$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) = \ldots = -2.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0,y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = \ldots = -8\%$

d.h. die relative Veränderung von $f(10,40)$ zu $f(9.8, 40.4)$ beträgt ca. -8%.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[8] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^2 \cdot y + y^2 \qquad (x > -1, y < 1)$$

auf (lokale) Extremwerte und Sattelpunkte.
(Ggf. angeben: Extremalstellen, Sattelpunktstellen und die zugehörigen Funktionswerte)

Ergebniskontrolle:

$f'_x(x,y) = 4 \cdot x + 4 \cdot x \cdot y$
$f'_y(x,y) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y$

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'_x(x,y) & = & 0 \\ f'_y(x,y) & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4 \cdot x + 4 \cdot x \cdot y & = & 0 \\ 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y & = & 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x \cdot (1 - x^2) & = & 0 \\ y & = & -x^2 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \quad \text{oder} \quad x = -1 \quad \text{oder} \quad x = 1 \\ y & = & -x^2 \end{array} \right\}$$

Also Lösungen: $P1 = (0,0), P2 = (-1,-1), P3 = (1,-1)$. Da $(0,0), (1,-1) \in D(f)$ aber gleichzeitig $(-1,-1) \notin D(f)$, sind $P1$ und $P3$ die stationären Stellen.

Zur Berechnung der Werte von $H_D(x,y) = f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2$ für jeden stationären Punkt (x_0, y_0):

$f''_{xx}(x,y) = 4 + 4 \cdot y$
$f''_{yy}(x,y) = 2$
$f''_{xy}(x,y) = 4 \cdot x$

- $H_D(0,0) = 4 \cdot 2 - 0 = 8 > 0$ und $f''_{xx}(0,0) = 4 > 0 \Rightarrow (0,0)$ ist eine lokale Minimalstelle von f mit Funktionswert $f(0,0) = 0$.
- $H_D(1,-1) = 0 - 16 < 0 \Rightarrow (1,-1)$ ist eine Sattelpunktstelle mit Funktionswert $f(1,-1) = 1$.