Mathematik für Ökonomen – WS 2016/17 – Campus Duisburg

Prof. Dr. V. Krätschmer, Fakultät für Mathematik

Test-Klausur

geplante Bearbeitungszeit: 120 Minuten

- Auf den folgenden Seiten finden Sie eine Test-Klausur. Sie bildet das Muster für die richtige Klausur Mathematik für Ökonomen.
- Sie können leicht nachprüfen, dass - bis auf Aufgabe 5 - diese Test-Klausur eine Auswahl darstellt aus den Klausuren *Mathematik für Ökonomen 1* und *Mathematik für Ökonomen 2*, die im SS 16 geschrieben wurden. Die ausgewählten Aufgabentypen finden Sie auch in den Klausuren vor SS 16, diese können Sie also auch als zusätzliches Übungsmaterial zur Vorbereitung der Klausur nutzen.
- **Hinweis** zu erlaubten **Hilfsmitteln** in der Klausur: Es werden nur reine Schreib- und Zeichengeräte zugelassen. Schriftliche Unterlagen, Handys und Taschenrechner sind also nicht erlaubt. Beim Durchrechnen der Test-Klausur werden Sie merken, dass Sie den Taschenrechner nicht benötigen werden; dies wird in der Klausur genauso sein. Wenn Sie glauben, Sie benötigen ihn trotzdem, empfehle ich Ihnen, den Ausdruck einfach stehen zu lassen, in der Regel gibt es dafür keinen Punktabzug!

Die Test-Klausur wie auch die Klausur bestehen aus jeweils **10 Aufgaben**, dabei sind die erreichbaren Punkte auf dem Deckblatt und zusätzlich auch an jeder Aufgabe kenntlich gemacht. Insgesamt sind **50 Punkte** erreichbar. Ab erreichten **23 Punkten** ist die Klausur bestanden.

Korrektur:

Aufg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe	Note
Punkte												
	3	4	6	6	3	6	4	4	5	9	50	
Korr												

Thema: Lineare Ungleichungssysteme

[3] Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden Ungleichungssystems und skizzieren Sie sie:

(1) $2 \cdot y + x \leq 9$

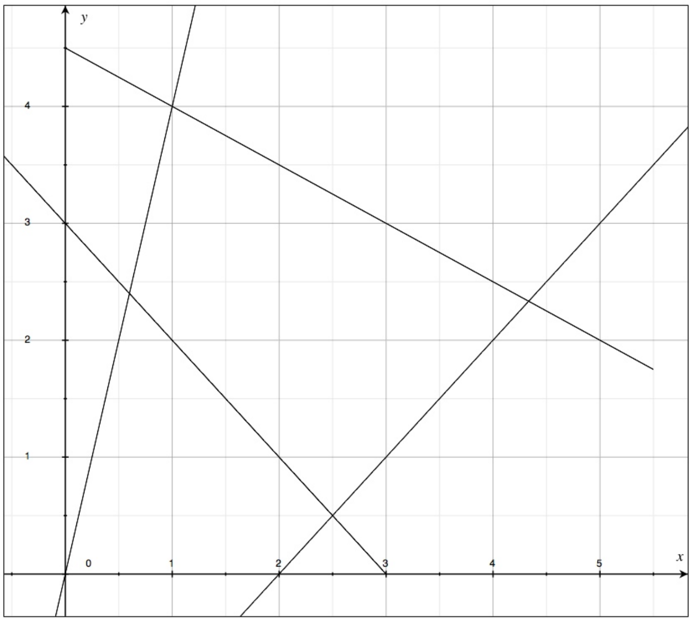
(2) $y - 4 \cdot x \leq 0$

(3) $y - x \geq -2$

(4) $y + x \geq 3$

Ergebniskontrolle:

$$\mathrm{L} = \left\{ (x, y) : y \leq -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{9}{2} \text{ und } y \leq 4 \cdot x \text{ und } y \geq x - 2 \text{ und } y \geq -x + 3 \right\}$$



Thema: Rechnen mit Matrizen

[4] Bei einem zweistufigen Produktionsprozess sind die beiden folgenden (einstufigen) Bedarfstabellen gegeben:

$$\text{Zwischenprodukte}\quad \begin{array}{c|ccc|} & \multicolumn{3}{c}{\text{Endprodukte}} \\ & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline Z_1 & 6 & 4 & 8 \\ Z_2 & 4 & 2 & 2 \\ Z_3 & 2 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \text{Rohstoffe}\quad \begin{array}{c|ccc|} & \multicolumn{3}{c}{\text{Zwischenprodukte}} \\ & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \hline R_1 & 2 & 3 & 1 \\ R_2 & 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Rohstoffpreise $r = (r_1, r_2) = (2, 3)$.

(a) Berechnen Sie M_{RE}, die Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung.

(b) Welcher Rohstoffbedarf $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ entsteht bei der Endproduktion $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Und welche Rohstoffkosten entstehen hierbei?

Ergebniskontrolle:

(a) $M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 18 & 24 \\ 24 & 22 & 20 \end{pmatrix}$

(b) $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 104 \\ 110 \end{pmatrix}$, Rohstoffkosten $= r \cdot R = (2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 104 \\ 110 \end{pmatrix} = 538$

Thema: Anwendungen des Gauß-Jordan Algorithmus

[2] (a) Bestimmen Sie aus dem folgenden Schlusstableau eines Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsmenge L_b des zugehörigen linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & 13 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Jordan}} \cdots \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b^* \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \text{-}1 & 0 & \text{-}3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[4] (b) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix B mit Hilfe des Gauß-Algorithmus (tabellarisch, mit irgendeinem nachvollziehbaren Protokoll der Lösungsschritte).
Geprüft wird die Beherrschung der Methode - eine auf anderem (unsystematischen) Weg gefundene Lösung bleibt unbewertet.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebniskontrolle:

(a) Beim LGS $Ax = b$ sind zwei Variablen frei wählbar. Ein Bsp. für die Darstellung der Lösungsmenge:

$$L_b = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \quad \begin{array}{ccccccc} x_1 & = & 7 & - & 2 \cdot x_3 & - & x_4 \\ x_2 & = & -3 & + & x_3 & & \\ x_3 & \in & \mathbb{R} & & & & \\ x_4 & \in & \mathbb{R} & & & & \end{array} \right\}$$

(b) **Ansatz:** Tabellenform

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	Protokoll
-1	1	1	1	0	0	I
1	3	-1	0	1	0	II
2	2	1	0	0	1	III

Lösung: Nach Durchführung des Gauß-Jordan Algorithmus

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -5/12 & -1/12 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Thema: Zinsrechnung

Voraussetzung: Jährliche Verzinsung (Zinseszins) und ein Anfangswert $K_0 > 0$.

[2] (a) Gegeben: Laufzeit $n = 3$. Wie hoch ist die erforderliche Rendite $i = p\%$, damit der Zielwert K_3 um 30% über dem Anfangswert K_0 liegt?

[2] (b) Gegeben: $i = 10\%$ und ein Zielwert K_x, der 30% über dem Anfangwert K_0 liegt. Erforderliche Laufzeit $n =$?
(d.h. mit der n-ten Verzinsung soll K_n erstmals die Bedingung $K_n \geq K_x$ erfüllen)

[2] (c) Gegeben: Laufzeit $n = 4$ und Zinsstaffel $69\%, 30\%, 0\%, 30\%$. Berechnen Sie den Zielwert K_4 bei einem Anfangswert von $K_0 = 10000$ und den effektiven Zinssatz i_{eff}.

Hilfswerte: $1.3^{\frac{1}{3}} \approx 1.09$, $\ln 1.1 \approx 0.1$, $\ln 1.3 \approx 0.26$, $13^4 = 28561$, $\ln 2.5 \approx 0.92$

Ergebniskontrolle:

(a) $K_3 = 1.3 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1+i)^3 \Leftrightarrow 1 + i = (1.3)^{\frac{1}{3}} \approx 1.09 \Leftrightarrow i = 0.09 = 9\%$

(b) $K_x = 1.3 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1.1)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(1.3)}{\ln(1.1)} \approx \frac{0.26}{0.1} = \frac{26}{10}$; $n = \lceil x \rceil = 3$

(c) $K_4 = (1.69 \cdot 1.3 \cdot 1 \cdot 1.3) \cdot 10000 = 169 \cdot 13 \cdot 13 = 13^4 = 28561$

$i_{\text{eff}} = (1.69 \cdot 1.3 \cdot 1 \cdot 1.3)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(1.3^4\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 1.3 - 1 = 0.3 = 30\%$

Thema: Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit von Funktionen mit 1 Variablen

[3] Überprüfen Sie, ob die folgende Funktion f an der „Nahtstelle" $x_0 = 0$ *stetig* ist:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2 - 2(1+x)}{x^2 - 5} & \text{für} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ (1+x) \cdot \ln(1+x^2) & \text{für} \quad 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

Ergebniskontrolle:

LGW in $x_0 = 0: \lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = \cdots = \frac{1}{5}$

RGW in $x_0 = 0: \lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = \cdots = 0$

Also gilt LGW $\neq$ RGW, und somit ist f nicht stetig in $x_0 = 0$.

Thema: Kurvendiskussion von Funktionen mit 1 Variablen

Gegeben $f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2/2}$ mit $D(f) = [-2, 2]$. Beachte: 1. Ableitung ist gegeben!
f hat die Ableitung $f'(x) = -\frac{x}{2} \cdot e^{-x^2/2}$.

[3](a) Bestimmen Sie auf Basis dieser Information alle lokalen Maximalpunkte (Maximalstellen und zugehörige Funktionswerte) von f über dem Definitionsbereich.

Ergebniskontrolle:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} \cdot e^{-x^2/2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(x) = \cdots = \frac{x^2-1}{2} \cdot e^{-x^2/2}$.

$f''(0) = \cdots = -\frac{1}{2} < 0$

Also ist $x = 0$ eine lokale Maximalstelle mit $f(0) = \frac{1}{2} \cdot e^{-0} = \frac{1}{2}$.

[3](b) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von f (konvex/konkav mit Wendepunkten).

Ergebniskontrolle:

Untersuchung auf Vorzeichenbereiche von $f''(x)$. Dazu zunächst Bestimmung der Nullstellen von $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2} \cdot e^{-x^2/2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{oder} \quad x = 1. \end{aligned}$$

3 Möglichkeiten, fortzufahren

1.Möglichkeit (mit dritter Ableitung):

$f'''(x) = x \cdot e^{-x^2/2} - \frac{x^3-x}{2} \cdot e^{-x^2/2}$

$f'''(-1) = -e^{-1/2} < 0$ und $f'''(1) = e^{-1/2} > 0$
Daher

$f''(x) \geq 0$ für $x \in [-2, -1]$ und $x \in [1, 2]$ d.h. f konvex über $[-2, -1]$ und $[1, 2]$,

$f''(x) \leq 0$ für $x \in [-1, 1]$, d.h. f konkav über $[-1, 1]$.

Außerdem gilt f besitzt in $x = -1$ und $x = 1$ jeweils eine Wendestelle mit den Funktionswerten $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2} \cdot e^{-1/2}$.

2.Möglichkeit (ohne dritte Ableitung):

Da die zweite Ableitungsfunktion stetig ist, und f'' nur in $x = -1$ und $x = 1$ Nullstellen besitzt, hat f'' auf $[-2, -1[$, $]-1, 1[$ und $]1, 2]$ jeweils nur 1 Vorzeichen.

$$f''(-2) = \frac{3}{2} \cdot e^{-2} > 0, \text{ also } f''(x) \geq 0 \text{ für } x \in [-2, -1], \text{ d.h. } f \text{ konvex über } [-2, -1].$$
$$f''(0) = \frac{-1}{2} \cdot e^{-0} = -\frac{1}{2} < 0, \text{ also } f''(x) \leq 0 \text{ für } x \in [-1, 1], \text{ d.h. } f \text{ konkav über } [-1, 1].$$
$$f''(2) = \frac{3}{2} \cdot e^{-2} > 0, \text{ also } f''(x) \geq 0 \text{ für } x \in [1, 2], \text{ d.h. } f \text{ konvex über } [1, 2].$$

Außerdem gilt f besitzt in $x = -1$ und $x = 1$ jeweils eine Wendestelle mit den Funktionswerten $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2} \cdot e^{-1/2}$.

3.Möglichkeit (direktes Erkennen):

	$f''(x) > 0$		$f''(x) < 0$
$\Leftrightarrow$	$\frac{x^2-1}{2} \cdot e^{-x^2/2} > 0$	$\Leftrightarrow$	$\frac{x^2-1}{2} \cdot e^{-x^2/2} < 0$
$\Leftrightarrow$	$x^2 - 1 > 0$	$\Leftrightarrow$	$x^2 - 1 < 0$
$\Leftrightarrow$	$\lvert x\rvert^2 > 1$	$\Leftrightarrow$	$\lvert x\rvert^2 < 1$
$\Leftrightarrow$	$\lvert x\rvert > 1$	$\Leftrightarrow$	$\lvert x\rvert < 1$
$\Leftrightarrow$	$x < -1$ oder $x > 1$	$\Leftrightarrow$	$x > -1$ und $x < 1$

D.h.

$$f''(x) \geq 0 \text{ für } x \in [-2, -1] \text{ oder für } x \in [1, 2], \text{ also } f \text{ konvex über } [-2 - 1] \text{ und } [1, 2].$$
$$f''(x) \leq 0 \text{ für } x \in [-1, 1], \text{ also } f \text{ konkav über } [-1, 1].$$

Außerdem gilt f besitzt in $x = -1$ und $x = 1$ jeweils eine Wendestelle mit den Funktionswerten $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2} \cdot e^{-1/2}$.

Thema: Elementare Berechnung von Integralen

[4] Berechnen Sie das Integral $\int_0^{e^2} f(t)\ dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} 3 \cdot (t^2+1) & \text{für } \ 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{für } \ 1 \leq t < e^1 \\ \dfrac{-3}{t} & \text{für } \ e^1 \leq t \leq e^2 \end{cases}$

Ergebniskontrolle:

$$\begin{aligned} \int_0^{e^2} f(t)dt &= \int_0^1 3 \cdot (t^2+1)\ dt + \int_1^{e^1} 1\ dt + \int_{e^1}^{e^2} \frac{-3}{t}\ dt \\ &= \cdots = 3 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot x^3\right]_0^1 + 3 \cdot [t]_0^1 + [t]_1^{e^1} - 3 \cdot [\ln t]_{e^1}^{e^2} = \cdots = e^1 \end{aligned}$$

Thema: Partielle Integration

[4] Für $1 \leq x$ sei $F(x) := F(1) + \int_1^x 3 \cdot t^2 \cdot \ln t \; dt$, wobei $F(1)$ fix vorgegeben ist, hier als $F(1) = -1/3$.

Berechnen Sie den Wert $F(x)$ mittels partieller Integration.

Ergebniskontrolle:
Mit $f(t) = \ln t$, $g'(t) = 3 \cdot t^2$ ist $f'(t) = t^{-1}$ und $g(t) = t^3$.

$$\begin{aligned} F(x) &= -1/3 + \int\limits_1^x 3 \cdot t^2 \cdot \ln t \; dt \\ &= -1/3 + \left[t^3 \cdot \ln t\right]_1^x - \int_1^x t^3 \cdot t^{-1} \; dt = \cdots = x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \end{aligned}$$

Thema: Partielle und totale Marginalanalyse

[5] Betrachten Sie die Funktion $f(x, y) = 100 \cdot x^{3/2} \cdot y^{1/2}$ für die Herstellungskosten einer Ware in Abhängigkeit vom Rohstoffpreis $x > 0$ und den Transportkosten $y > 0$. Weiterhin sei die Basisstelle (x_0, y_0) mit $x_0 = 50$ und $y_0 = 10$ vorgegeben.

(a) Bestimmen Sie die Rohstoffpreiselastizität $\mathcal{E}_x^f$ und die Transportkostenelastizität $\mathcal{E}_y^f$ an der obigen Basisstelle.

(b) Geben Sie eine Abschätzung für die relative Veränderung der Funktion f an der obigen Basisstelle, wenn sich dort der Rohstoffpreis um 2% vermindert und die Transportkosten um 8% erhöhen.

Ergebniskontrolle:

(a) An der Basisstelle $(x_0, y_0) = (50, 10)$ gilt

$$\mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) = \cdots = 50 \cdot \frac{150 \cdot 50^{1/2} \cdot 10^{1/2}}{100 \cdot 50^{3/2} \cdot 10^{1/2}} = \frac{150}{100} = 1.5$$

und

$$\mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) = \cdots = 10 \cdot \frac{50 \cdot 50^{3/2} \cdot 10^{-1/2}}{100 \cdot 50^{3/2} \cdot 10^{1/2}} = \frac{50}{100} = 0.5.$$

(b) $\frac{df}{f} \approx \mathcal{E}_x^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{x_0} + \mathcal{E}_y^f(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{y_0} = 1.5 \cdot (-2)\% + 0.5 \cdot 8\% = 1\%$

d.h. eine 2% Verminderung des Rohstoffpreises bei gleichzeitiger 8% Erhöhung der Transportkosten führt zu einer ungefähr 1% Erhöhung der Herstellungskosten.

Thema: Optimierungsaufgaben mit 2 Variablen (mit oder ohne Nebenbedingung)

[9] Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 6 \cdot x + 4 \cdot y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

auf (lokale) Extremwerte unter der Nebenbedingung $x^3 + 2 \cdot y = 5$.
(Ggf. angeben: Extremalstellen und die zugehörigen Funktionswerte)
Hinweis zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} & D(x,y,\lambda) \\ := \quad & (f''_{xx}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xx}(x,y)) \cdot (b'_y(x,y))^2 - 2 \cdot (f''_{xy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{xy}(x,y)) \cdot b'_x(x,y) \cdot b'_y(x,y) \\ & +(f''_{yy}(x,y) + \lambda \cdot b''_{yy}(x,y)) \cdot (b'_x(x,y))^2 \end{aligned}$$

Ergebniskontrolle:

- Nebenbedingung in Gleich-Null-Form
  $b(x,y) = x^3 + 2 \cdot y - 5 \stackrel{!}{=} 0$
- Aufstellen der Lagrange-Funktion
  $L(x,y,\lambda) = 6 \cdot x + 4 \cdot y + \lambda \cdot (x^3 + 2 \cdot y - 5)$
- Bestimmung der bedingt stationären Punkte:
  Gesucht Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} L'_x(x,y,\lambda) &= 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) &= 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

  Als bedingt stationäre Punkte erhält man: $P1 = (-1,3), P2 = (1,2)$ mit $\lambda = -2$

- Berechnung der Werte von $D(x_0, y_0, \lambda_0)$ für jeden bedingt stationären Punkt (x_0, y_0) mit zugehörigem λ_0
  - $D_0(-1,3,-2) = \cdots = 48 > 0 \Rightarrow (-1,3)$ ist eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $x^3 + 2 \cdot y = 5$ mit Funktionswert $f(-1,3) = 6$.
  - $D_0(1,2,-2) = \cdots = -48 < 0 \Rightarrow (1,6)$ ist eine lokale Maximmalstelle von f unter der Nebenbedingung $x^3 + 2 \cdot y = 5$ mit Funktionswert $f(1,2) = 14$.