

## Grundlagen (teilweise Schulstoff)

- ▷ teilweise kompakte Wiederholung in Vorlesung/Übung
- ▷ semesterbegleitende Aufarbeitung in den Tutorien

*Viele der unten genannten Begriffe sind in folgendem Sinne vorausgesetzt:* Zwar werden die wichtigsten Begriffe spätestens an den Stellen, an denen sie erstmals eingesetzt werden, noch einmal besprochen, aber weniger unter rein mathematischen Gesichtspunkten, sondern eher in Hinblick auf Anwendungen. Wichtige Ergebnisse werden danach aber oft nicht detailliert hergeleitet, sondern nur in der benötigten Form notiert und anhand von Beispielen besprochen. Dies ist, wenn der entsprechende Stoffbereich völlig neu für Sie ist, unzureichend und könnte Sie überfordern (beispielsweise die elementare Integralrechnung an nur einem Vormittag). Sie müssen also entsprechend vorbereitet sein, d.h. Ihre Schulkenntnisse aktivieren und aufbereiten oder ggf. den entsprechenden Stoffbereich *rechtzeitig* nachholen.

Ein wichtiger Grund für diese Zusammenfassung ist auch, dass wir (nicht unbedingt einheitlich festgelegte) Schreibweisen und Definitionen wohlbekannter Dinge in einer *einheitlichen Form* sammeln wollen:

### Mengen und Aussagen

Symbolik/Sprechweisen, Grundregeln

### Zahlenmengen

$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ , Intervalle in  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$

### Rechenregeln

Potenzregeln, Binomische Formeln

### Funktionen

Funktion, Definitions- und Wertebereich, Bild, Urbild, Umkehrfunktion, Monotone Funktionen

Grundfunktionen:

Betrag, Rundungsmethoden, Polynome, Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten, Exponentialfunktion, Logarithmus

## Mengen und Aussagen

**Aussage A** Ein sprachliches Objekt, dem genau eine der beiden Eigenschaften „wahr“ (= 1) oder „falsch“ (= 0) zugeordnet werden kann:  $A$

Symbol	Name	Sprechweise	Wahrheitswert (Festlegungen)
$\neg A$	<b>Negation</b>	<i>nicht A</i>	$w(\neg A) = 1 - w(A)$
$A \wedge B$	<b>Konjunktion</b>	<i>A und B</i>	$w(A \wedge B) = \min(w(A), w(B))$
$A \vee B$	<b>Disjunktion</b>	<i>A oder B</i>	$w(A \vee B) = \max(w(A), w(B))$
$A \Rightarrow B$	<b>Implikation</b>	<i>A impliziert B</i>	$w(A \Rightarrow B) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (w(A) \leq w(B)) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$A \Leftrightarrow B$	<b>Äquivalenz</b>	<i>A äquivalent B</i>	$w(A \Leftrightarrow B) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w(A) = w(B) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Weitere Zusammensetzungen von Aussagen mit Hilfe dieser Symbole

### VORSICHT

Aus einer falschen Aussage (Wahrheitswert 0) kann jede andere gefolgert werden, und eine wahre Aussage (Wahrheitswert 1) kann aus jeder anderen Aussage gefolgert werden.

**Kontradiktion** eine Aussage, die immer falsch ist

**Tautologie** eine Aussage, die immer wahr ist

**1** Ist eine Implikation  $A \Rightarrow B$  wahr, so heißt **A hinreichende Bedingung für B** und **B notwendige Bedingung für A**

### Definitionssymbole

$:=$  **Linke Seite**  $:=$  **Rechte Seite** bedeutet

das Objekt auf der linken Seite „ergibt sich aus“ der rechten Seite

$:\Leftrightarrow$  **bzw. Linke Seite**  $:\Leftrightarrow$  **Rechte Seite** bedeutet

das Objekt links „wird definiert durch“ die Angaben rechts

**Menge** Zusammenfassung bestimmter (realer oder gedachter) wohl unterschiedener Objekte (aus einem festen Bereich) zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen dann **Elemente der Menge**.

$x \in M$   $x$  ist **Element der Menge**

$x \notin M$   $x$  ist **nicht Element der Menge  $M$**

Angabe einer Menge durch Aufzählen (nicht immer möglich)

$$M := \{3, III, \textcircled{3} \text{ drei, try}\}, \emptyset := \{\} (\text{leere Menge}), \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

Angabe einer Menge durch Angabe der *mengenbildenden* Eigenschaft

$$M := \{x \in \text{Grundmenge: Eigenschaft von } x\}, \mathbb{G} := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$$

### VORSICHT

Die Objekte einer Menge sind *verschieden*. Nur durch setzen von geschweiften Klammern um eine Aufzählung von Zahlen entsteht nicht notwendig eine Menge:  $\{1, 2, 1\}$  ist keine Menge, aber z.B. eine „Liste“ oder eine „indizierte Menge“ siehe ▷ Informatik

### Vergleich von Mengen $A, B$

$A \subset B$   $A$  ist **Teilmenge von  $B$** , wenn jedes Element von  $A$  auch Element von  $B$  ist.  $(x \in A \Rightarrow x \in B)$   
 $A$  ist *echte Teilmenge* von  $B$ , wenn  $A \subset B$  und es ein Element von  $B$  gibt, das nicht zu  $A$  gehört

$A = B$   $B \subset A$  und  $A \subset B$   $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$   
 Jedes Element von  $B$  ist auch Element von  $A$  und umgekehrt

**Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge!**

### Mengenoperationen

$A \cup B$  **Vereinigungsmenge von  $A$  und  $B$**   
 $A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$

$A \cap B$  **Schnittmenge von  $A$  und  $B$**   
 $A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$

$A \setminus B$  **Differenzmenge, besser: Komplement von  $B$  in  $A$**   
 $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$

$\overline{B}$  **Komplement von  $B$  (in einer festen Grundmenge  $X$ )**  
 $\overline{B} := \{x \in X : x \notin B\} = X \setminus B$

Zwei Mengen  $A, B$  heißen **disjunkt**, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben:  $A \cap B = \emptyset$ . Mehrere Mengen heißen *paarweise disjunkt*, wenn je zwei (alle möglichen Paare) dieser Menge disjunkt sind. Im Falle der Vereinigung paarweise disjunkter Mengen wird häufig das Symbol  $\uplus$  statt  $\cup$  verwendet.

Oft interessieren bei Argumentationen mit Mengen weniger deren einzelne Elemente selbst, sondern eher nur deren Anzahl:

*Schreibweise*  $\#(A) :=$  Elementanzahl der Menge  $A$

Das Wort Anzahl setzt voraus, dass die Menge auch „abgezählt“ werden kann:

<b>Endliche Menge <math>M</math>:</b>	<b>Elemente zählbar mittels <math>\{1, 2, \dots, n\}</math> für eine natürliche Zahl <math>n</math>; <math>\#(M) := n</math>.</b>
<b>Abzählbar unendliche Menge <math>M</math>:</b>	<b>Nicht endlich, aber Elemente zählbar mittels <math>\{1, 2, 3, \dots\}</math>; <math>\#(M) := \infty</math>.</b>
<b>Überabzählbare Menge <math>M</math>:</b>	<b>weder endliche, noch abzählbar unendliche Menge; <math>\#(M)</math> nicht definiert.</b>

$\infty$  Lemniskate, Symbol für das Unendliche, eine ideale „Zahl“, die nicht zu  $\mathbb{R}$  gehört

$\infty + \infty := \infty$ ,  $\infty \pm n := \infty$  für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\infty - \infty$  nicht definiert

## Zahlenmengen

Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{m/k : m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R} =$ Menge aller Grenzwerte von (allen) Folgen rationaler Zahlen

siehe ▷ Folgen und Grenzwerte, Thema 4

Die Grenzwerteigenschaft bedeutet, dass jede reelle Zahl beliebig gut – nach Vorgabe einer Genauigkeit (z.B.  $10^2$ ) – durch rationale Zahlen, insbesondere eine endliche Dezimalzahl, approximiert werden kann, z.B.

$\sqrt{2} \approx 1.4142$ ,  $1/\sqrt{2} \approx 0.7071$ ,  $\sqrt{3} \approx 1.7321$ ,  $e \approx 2.71828$ ,  $e^{-1} \approx 0.3678$ ,  $\ln 2 \approx 0.69$ ,  $\ln 10 \approx 2.3$ ,  $\pi \approx 3.1415$  oder so:  $\pi \approx \frac{22}{7}$ .

<b>Intervalle in <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>reelle Zahlen <math>a, b</math> mit <math>a &lt; b</math></b>
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall
$[a, b[ := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	links abgeschl., rechts offenes Interv.
$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	links offenes, rechts abgeschl. Interv.
$]a, b[ := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	offenes Intervall
$] - \infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$	linker Halbstrahl
$[a, +\infty[ := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$	rechter Halbstrahl
$] - \infty, \infty[ := \mathbb{R}$	Zahlengerade (Zahlenstrahl)
$[a, a] := \{a\}$	einpunktige Menge, <u>kein</u> Intervall

*Bequeme, klare Schreibweise für eingeschränkte Zahlenmengen*

**Zahlenmenge** **Bedingung**  $:= \{x \in \text{Zahlenmenge} : x \text{ erfüllt Bedingung}\}$

$\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ ,  $\mathbb{R}_{<0} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ , entsprechend  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\mathbb{R}_{\leq 0}$

**VORSICHT** beim Lesen der beliebigen Symbole  $\mathbb{R}_+$  und  $\mathbb{R}_-$  in verschiedenen Quellen: Es ist nicht einheitlich geregelt, ob dabei die Zahl 0 zugezählt wird oder nicht (aber wichtig bei Division, Lösungsmengen)

$\mathbb{R}^n$   **$n$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  von reellen Zahlen** **( $n$ -Vektoren)**  
 **$n$  = Dimension des Tupels ( $n \in \mathbb{N}$ )**  
**Anordnung:  $i$ -te Stelle im Tupel heißt  $i$ -te Koordinate**

$\mathbb{R}^1$	= $\mathbb{R}$ , d.h. $(x) := x$ für $x \in \mathbb{R}$		eindimensional
$\mathbb{R}^2$	= $\{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$	Paare (2-Tupel)	zweidimensional
$\mathbb{R}^3$	= $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$	Tripel (3-Tupel)	dreidimensional
$\mathbb{R}^n$	= $\{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$	$n$ -Tupel	$n$ -dimensional

## Rechenregeln

### 2 Potenzen $a^m$ mit ganzzahligen Exponenten

$$a, b \in \mathbb{R}_{\neq 0} \text{ und } n, m \in \mathbb{Z}$$

$$a^0 = 1, a^{n+m} = a^n \cdot a^m, (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, a^{n \cdot m} = (a^n)^m$$

*$n$ -te Wurzeln/allgemeinere Exponenten: siehe  $\triangleright$  Grundfunktionen*

$$2^6 = 2^0 2^6 = 2^1 2^5 = 2^2 2^4 = 2^3 2^3 = (2^3)^2 = (2^2)^3, 1 = 6^0 = (6^3)^0 = (6^0)^3$$

### 3 Binomische Formeln

$$(a^2 \pm 2ab + b^2) = (a \pm b)^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Anwendung zur Umrechnung von Differenzen

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b} \text{ für } a + b \neq 0$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

#### 4 Fakultät, Binomialkoeffizient

$0! = 1$ ,  $n! = 1 \cdot \dots \cdot n$  für  $n \in \mathbb{N}$  Bsp.  $10! = 3628800$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n \quad \text{„n über k“}$$

= Anzahl Möglichkeiten,  $k$  von  $n$  Objekten auszuwählen

#### Allgemeine binomische Formel

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

insbesondere ist (für  $a = b = 1$ ):  $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

## Funktionen

### 5 Funktionen

Eine Funktion  $f$  ist eine Zuordnung von Elementen einer Menge  $D(f)$  auf jeweils genau ein Element aus einer Menge  $Y$

$$f : D(f) \rightarrow Y : x \mapsto y = f(x)$$

$D(f)$  heißt **Definitionsbereich** von  $f$

$Y$  heißt **Wertevorrat** von  $f$

$W(f) := \{f(x) : x \in D(f)\}$  heißt **Wertebereich** von  $f$

In den meisten ökonomischen Anwendungen haben wir  $D(f) \subset \mathbb{R}^n$  und  $W(f) \subset \mathbb{R}$ .

### 6 Umkehrbare Funktionen und ihre Umkehrfunktion

Eine Funktion  $f : D(f) \rightarrow W(f)$  heißt **umkehrbar**, falls jedes  $y \in W(f)$  Wert  $f(x)$  von genau einem  $x \in D(f)$  ist.

Zu einer umkehrbaren Funktion  $f : D(f) \rightarrow W(f)$  kann eine neue Funktion gebildet werden

$$f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f) : y = f(x) \mapsto x = f^{-1}(y).$$

Sie heißt **Umkehrfunktion**, Symbol:  $f^{-1}$ . Es gilt

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

Eine Umkehrfunktion ist wieder umkehrbar, bei erneuter Umkehrung entsteht die ursprüngliche umkehrbare Funktion:  $(f^{-1})^{-1} = f$

#### „Bestimmung“ der Umkehrfunktion

Methode 1 *(nicht immer möglich)*

*Eindeutiges* Auflösen der Funktionsvorschrift  $y = f(x)$  nach  $x$

Methode 2 *(wenn Methode 1 versagt)*

Z.B. mit Hilfe eines Kriteriums (s.u.) weist man/frau nach, dass die Funktion umkehrbar (eindeutig) ist und kann dann mit  $f^{-1}$  „rechnen“, Wertebestimmung meist iterativ mit Hilfe



der Gleichung  $f(f^{-1}(x)) = x$  (methodisches Probieren). Wichtige solcher Umkehrfunktionen bekommen einen eigenen Namen/ein eigenes Symbol, z.B. ist  $\sqrt{x}$  (mit  $D(\sqrt{\cdot}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ), definiert als Umkehrfunktion der Funktion  $f(x) := x^2$  (mit  $D(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$ ).

**7 Jede umkehrbare Funktion erfüllt für alle  $x, y \in D(f)$  :**  

$$x = y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

### 8 Monotone Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

$I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall

$f$  monoton wachsend in  $I : \Leftrightarrow$

für alle  $x, y \in I$  gilt:  $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

äquivalent:  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

$f$  monoton fallend in  $I : \Leftrightarrow$

für alle  $x, y \in I$  gilt:  $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

äquivalent:  $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

$f$  streng monoton wachsend in  $I : \Leftrightarrow$

für alle  $x, y \in I$  gilt:  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

äquivalent:  $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$  (MF 1)

äquivalent:  $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$  (MF 2)

$f$  streng monoton fallend in  $I : \Leftrightarrow$

für alle  $x, y \in I$  gilt:  $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

äquivalent:  $x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$  (MF 3)

äquivalent:  $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$  (MF 4)

Gleichungen (MF 1)-(MF 4) sind nützlich zur Umformung von Ungleichungen.

### 9 Monotoniekriterium

**Eine streng monoton wachsende bzw. fallende Funktion  $f$  ist umkehrbar.**

Ist z.B.  $D(f) = [a, b]$  ein Intervall und  $f$  strikt monoton ...

... wachsend, dann ist  $W(f) = D(f^{-1}) = [f(a), f(b)]$

... fallend, dann ist  $W(f) = D(f^{-1}) = [f(b), f(a)]$

In beiden Fällen ist  $W(f^{-1}) = D(f) = [a, b]$

## 10 Grundfunktionen I

$$\text{Betrag } |x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad \text{und } x \in \mathbb{R}$$

**Aufrunden**  $\lceil x \rceil :=$  aufrunden von  $x$  zur nächsten ganzen Zahl,  
 $x \in \mathbb{R}$

**Abrunden**  $\lfloor x \rfloor :=$  abrunden von  $x$  zur nächsten ganzen Zahl,  
 $x \in \mathbb{R}$

**Runden**  $\lceil x \rceil :=$  runden von  $x$  zur nächsten ganzen Zahl,  
 $x \in \mathbb{R}$   
(Übliche Festlegung des Grenzfalls der Mitte  
 $x = \frac{k+(k+1)}{2}$  zwischen zwei ganzen Zahlen:  
Aufrunden (auf  $k + 1$ ))

**Polynom vom Grad  $n \in \mathbb{N}$  mit Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n$ ;  $a_n \neq 0$**

$$f(x) := a_0 x^0 + \dots + a_n x^n, \quad D(f) = \mathbb{R}$$

$$f(x) = a_0$$

*konstante Funktion*

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x, a_1 \neq 0$$

*Gerade (affine lineare Funktion)*

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2, a_2 \neq 0$$

*quadratische Funktion*

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3, a_3 \neq 0$$

*kubische Funktion*

**Ein Polynom  $n$ -ten Grades hat höchstens  $n$  verschiedene Nullstellen**

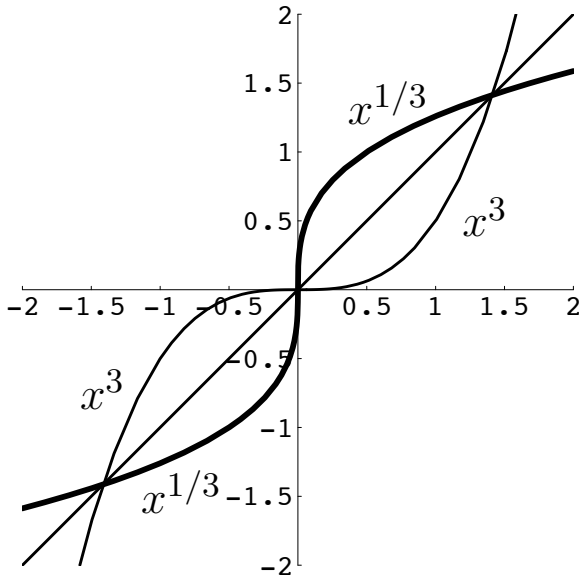
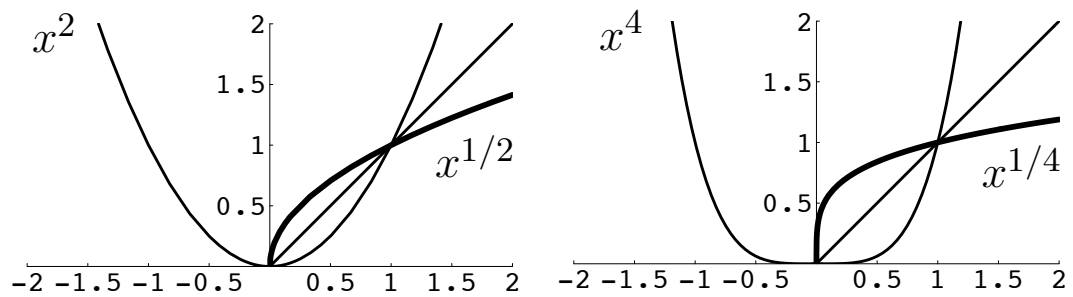
## 11 Grundfunktionen II

$k$ -te Wurzel  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^{1/k}$  mit  $k \in \mathbb{N}$  gerade

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^{1/k}$  mit  $k \in \mathbb{N}$  ungerade

$x^{1/k}$  ist eine Bezeichnung für die Umkehrfunktion der Potenzfunktion

$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \mapsto x^k$  ( $k$  gerade),  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^k$  ( $k$  ungerade)

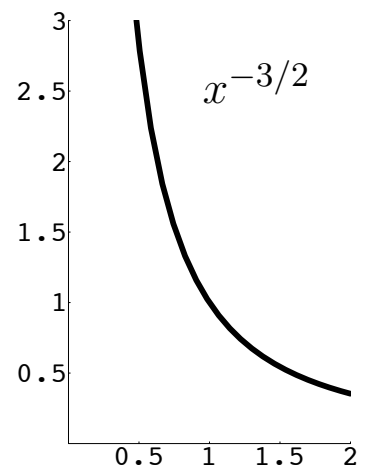
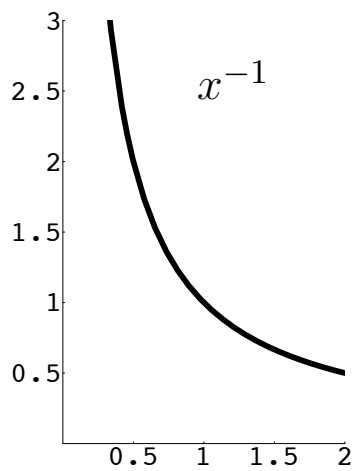
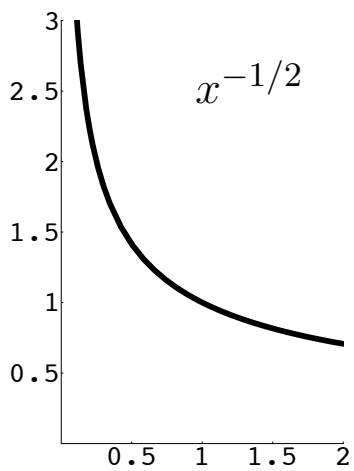
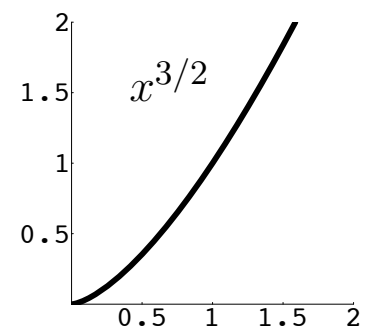
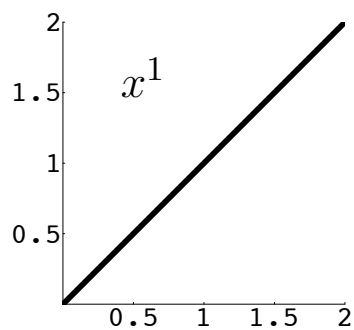
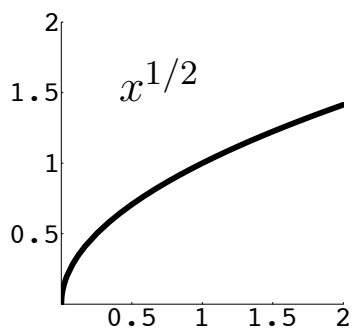


**Potenzfunktionen  $x^r$  mit rationalen Exponenten  $r = m/k$**

$$f(x) = x^{m/k} \text{ mit } k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, D(f) = \mathbb{R}_{>0}$$

Zusammengesetzte Funktion  $x \mapsto x^{1/k} \mapsto (x^{1/k})^m$ , eine *negative* Potenz ist hierbei definiert als Kehrwert der entsprechenden positiven Potenz.

*Beispiel*



**12** Potenzregeln mit rationalen Exponenten

Für  $a, b > 0$  und  $s, t \in \mathbb{Q}$  ist  $a^0 = 1$  und

$$a^{s \cdot t} = (a^s)^t, \text{ insbesondere } a^{-t} = 1/a^t \quad \textit{Faktorisierung des Exponenten}$$

$$b^{s+t} = b^s \cdot b^t \quad \textit{gleiche Basis}$$

$$(a \cdot b)^t = a^t \cdot b^t, \text{ insbesondere } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \textit{gleicher Exponent}$$

### 13 Grundfunktionen III

#### Exponentialfunktion $e^x$

andere Schreibweise:  $\exp(x)$

Wichtige Funktion zum (theoretischen) Rechnen bei der Analyse von Änderungen und grenzwertigem Verhalten eines Modells

▷ stetige Verzinsung, Wachstumsfunktionen, statistische Schätzung

*Bsp.* (Unterjährige und stetige Verzinsung)

Ein Guthaben von 10000 Euro soll zu  $i = 5\%$  jährlich verzinst werden. Nach Auszahlung am Ende des Jahres beträgt das verzinste Guthaben  $K = 10000 \cdot (1+i) = 10000 \cdot (1 + \frac{5}{100}) = 10500$  Euro. Es sind allerdings auch andere Auszahlungsmodi möglich, bei denen Auszahlungen in kürzeren Abständen erfolgen. So etwas wird *unterjährige Verzinsung* genannt. Mögliche Beispiele:

- **monatliche Verzinsung:** monatliche Auszahlung

Die Verzinsung wird durch 12 geteilt, verzinste Guthaben nach 1 Jahr

$$K = 10000 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} = 10000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100 \cdot 12}\right)^{12} \approx 10511.62 \text{ Euro.}$$

- **wöchentliche Verzinsung:** wöchentliche Auszahlung

Die Verzinsung wird durch 52 geteilt, verzinste Guthaben nach 1 Jahr

$$K = 10000 \cdot \left(1 + \frac{i}{52}\right)^{52} = 10000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100 \cdot 52}\right)^{52} \approx 10512.46 \text{ Euro.}$$

- **tägliche Verzinsung:** tägliche Auszahlung

Die Verzinsung wird durch 365 geteilt, verzinste Guthaben nach 1 Jahr

$$K = 10000 \cdot \left(1 + \frac{i}{365}\right)^{365} = 10000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100 \cdot 365}\right)^{365} \approx 10512.67 \text{ Euro.}$$

- **Verzinsung in m-Teile:**  $m$ -malige Auszahlung

Die Verzinsung wird durch  $m$  geteilt, verzinste Guthaben nach 1 Jahr

$$K = 10000 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = 10000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100 \cdot m}\right)^m \text{ Euro.}$$

Wird nun eine hochfrequente Auszahlung (= sehr grosses  $m$ ) vorgenommen, so weiss man, dass der Wert  $\left(1 + \frac{5}{100 \cdot m}\right)^m$  sich in der Nähe von  $e^{5/100}$  (= dem Wert der Exponentialfunktion an der Stelle  $5/100$ ) „einpendelt“. Von *stetiger Verzinsung* spricht man, wenn ideell permanent ausgezahlt würde. In dem Fall wäre das verzinste Guthaben auf  $K = 10000 \cdot e^{5/100}$  angewachsen.

*Definition* Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  kann der Funktionswert der Exponentialfunktion an der Stelle  $x$  definiert werden sowohl als Grenzwert wie im Beispiel der stetigen Verzinsung als auch als Grenzwert eines Polynomtyps:

$$e^x := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^0}{0!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

▷ Thema 4

Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  und Wertebereich  $\mathbb{R}_{>0}$

Rechner verwenden folgende Näherung

$$e^x \approx \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \text{ für „große“ } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

Diese ist schon für relativ kleine  $n$  gut brauchbar.

### Eulersche Zahl

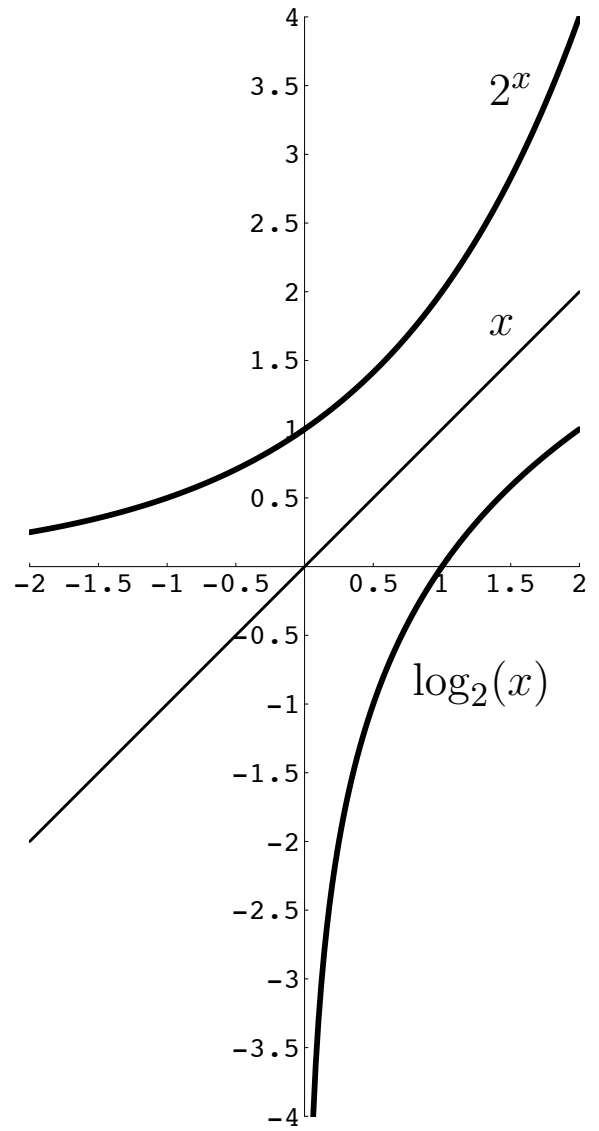
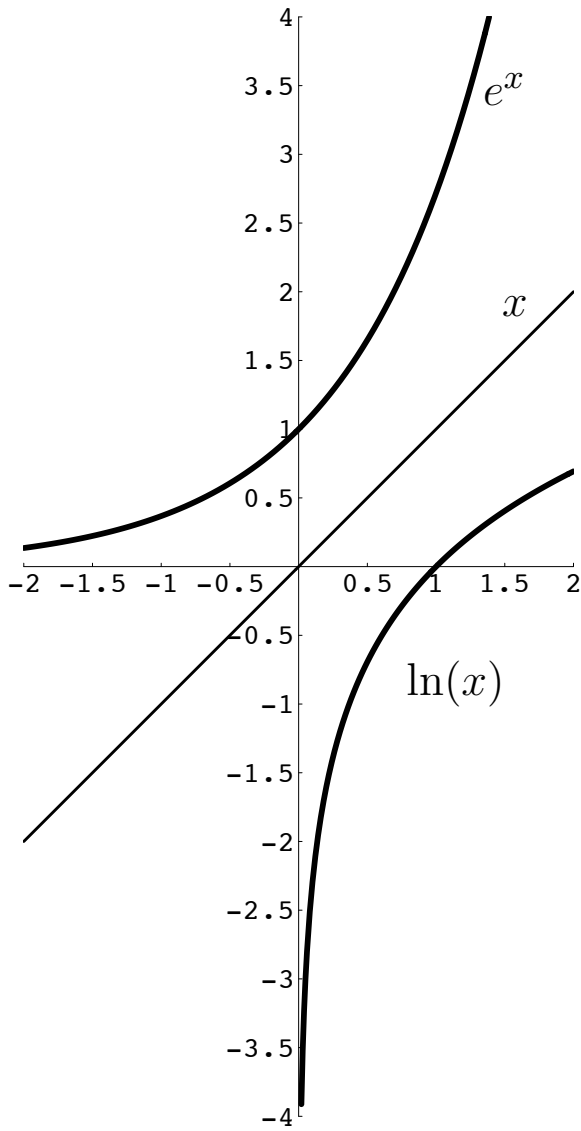
$$e := e^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{0!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \approx 2.71828$$

Die Zuordnungsvorschrift der Exponentialfunktion ist erst nach Thema 4 verstehbar. Für das Arbeiten mit der Exponentialfunktion **reicht vollständig die Kenntnis** von

Definitionsbereich, Wertebereich, grobem Funktionsverlauf, wichtigen Eigenschaften

Im Verlauf des Semesters werden die nötigen Eigenschaften nach und nach eingeführt. In Thema 1 erste Angaben zum *Graph* und *Monotonieverhalten* sowie die Formulierung der *Basisrechenregeln*.

<i>Basiseigenschaft</i>	<b>streng monoton wachsend</b>	
<i>Rechenregeln</i>	$(e^t)^s = e^{t \cdot s}$	für $s, t \in \mathbb{R}$
	$e^{t+s} = e^t \cdot e^s$	für $s, t \in \mathbb{R}$
<i>insbesondere</i>	$e^0 = 1; e^{-t} = 1/e^t; e^t/e^s = e^{t-s}$	für $s, t \in \mathbb{R}$





## Natürlicher Logarithmus $\ln =$ Umkehrfunktion von $e^x$

Definitionsbereich  $\mathbb{R}_{>0}$  und Wertebereich  $\mathbb{R}$

$$\ln(e^x) = x = e^{\ln x}$$

<i>Basiseigenschaft</i>	<b>streng monoton wachsend</b>	
<i>Rechenregeln</i>	$\ln(c) + \ln(d) = \ln(c \cdot d)$	für $c, d > 0$
	$\ln(c^t) = t \cdot \ln(c)$	für $c > 0, t \in \mathbb{Q}$
<i>insbesondere</i>	$\ln(1) = 0; \ln(e) = 1; \ln\left(\frac{c}{d}\right) = -\ln\left(\frac{d}{c}\right)$	für $\frac{c}{d} > 0$

Bsp. a)  $\ln(3/4) = \ln(3) - \ln(4)$

b) Für  $x, y, z > 0$  ist  $\ln(x^{1/7} \cdot y^{-2/3} \cdot z^{2/5}) = \frac{1}{7} \ln(x) - \frac{2}{3} \ln(y) + \frac{2}{5} \ln(z)$

## Allgemeine Exponentialfunktion zur Basis $b > 0$

$$b^x := e^{x \ln b}$$

Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  und Wertebereich  $\mathbb{R}_{>0}$

Bsp. a)  $2^x = e^{x \ln 2}, 2^{1/10} = e^{(1/10) \ln 2} \approx 1.07177$

b)  $2^n =$  Anzahl Möglichkeiten bei  $n$  Bit,  $2^{32} = 4294967296$

*erweiterte Rechenregel für natürlichen Logarithmus:*  $\ln(c^t) = t \cdot \ln(c)$  für  $c > 0, t \in \mathbb{R}$

Bsp.  $1.05^x = 2 \Leftrightarrow \ln(1.05^x) = \ln 2 \Leftrightarrow x \cdot \ln 1.05 = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 1.05}$

## 14 Allgemeine Potenzregeln

Für  $a, b > 0$  und  $s, t \in \mathbb{R}$  ist  $a^0 = 1$  und

$$a^{s \cdot t} = (a^s)^t \quad \text{Faktorisierung des Exponenten}$$

$$b^{s+t} = b^s \cdot b^t, \text{ insbesondere } e^{s+t} = e^s \cdot e^t \quad \text{gleiche Basis}$$

$$(a \cdot b)^t = a^t \cdot b^t, \text{ insbesondere } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \text{gleicher Exponent}$$