

## Elementare Matrizenrechnung

**$m \times n$ -Matrix von Zahlen**

*rechteckige Tabelle*

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

**$m \times n$  Dimension der Matrix**

*Sprechweise: „m Kreuz n“*

wobei  **$m$**  = Anzahl Zeilen,  **$n$**  = Anzahl Spalten

**$a_{i,j}$  Element der Matrix**

*1. Index Zeilennr., 2. Index Spaltennr.*

Eine  $1 \times 1$ -Matrix wird als Zahl – ohne die Matrixklammern – geschrieben

Eine  $m \times n$ -Matrix  $A_{m \times n}$  hat  $m \cdot n$  Elemente  $a_{i,j}$

**23 Gleichheit  $\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{B}_{m \times n} : \Leftrightarrow$  elementweise Gleichheit**

*Gleichheit  $A = B$  :*

*1. A und B müssen gleiche Dimension haben*

*2.  $a_{ij} = b_{ij}$  für alle Elemente im paarweisen Vergleich*

*Bsp.*  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{1 \times 2}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$  sind nicht vergleichbar (als Matrizen)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{1 \times 2} \neq \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}_{1 \times 2}$  sind vergleichbar, aber verschieden

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{1 \times 2} = \begin{pmatrix} 3^0 & \frac{4}{2} \end{pmatrix}_{1 \times 2}$  sind gleich

**Transponierte  $(\mathbf{A}^T)_{n \times m} = (\mathbf{A}_{m \times n})^T$  einer Matrix  $\mathbf{A}_{m \times n}$**

Die *Zeilen* (bzw. Spalten) einer Matrix werden in unveränderter Reihenfolge als *Spalten* (bzw. Zeilen) aufgeschrieben.

*Zweimaliges Transponieren führt zum Ausgangszustand zurück*

*Eigenschaft:  $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$*

$$\text{Bsp. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}; (a_1 \ a_2)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Transponieren ist insbesondere für reine Darstellungszwecke sehr nützlich.

## 24 Einige spezielle Matrizen $A_{m \times n}$

### Äußere Formen

$m = n$	<b>quadratische Matrix</b>	<i>d.h. Zeilenanzahl = Spaltenanzahl</i>
$m = 1$	<b><math>n</math>-Zeilenvektor</b>	<i><math>n</math> = Elementanzahl der einen Zeile</i>
$n = 1$	<b><math>m</math>-Spaltenvektor</b>	<i><math>m</math> = Elementanzahl der einen Spalte</i>

### Innere Formen

$\mathbf{0}_{m \times n}$	<b>Nullmatrix</b>	<i>Zeilen und <math>n</math> Spalten nur Nullen</i>
$\mathbf{0}_n, (\mathbf{0}_n)^T$	<b>Nullspalte, Nullzeile</b>	<i>Spalte bzw. Zeile mit <math>n</math> Nullen</i>
$\mathbf{1}_{m \times n}$	<b>Einsenmatrix</b>	<i>Zeilen und <math>n</math> Spalten nur Einsen</i>
$\mathbf{1}_n, (\mathbf{1}_n)^T$	<b>Einsenspalte, Einsenzeile</b>	<i>Spalte bzw. Zeile mit <math>n</math> Einsen</i>

Wir schreiben *Einsenmatrix* statt *Einsmatrix* um jede Verwechslung mit der (folgenden) *Einheitsmatrix* auszuschließen

### Mischformen

$$\mathbf{E}_{n \times n} \text{ Einheitsmatrix } \mathbf{E}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$e_n^{j\cdot}$   $j$ -te Spalte von  $\mathbf{E}_{n \times n} = j$ -ter Einheitsspaltenvektor

(das  $j$ -te Element von  $e_n^{j\cdot}$  ist *Eins*, alle anderen sind *Null*)

$(e_n^{i\cdot})^T$   $i$ -te Zeile von  $\mathbf{E}_{n \times n} = i$ -ter Einheitszeilenvektor

(das  $i$ -te Element von  $(e_n^{i\cdot})^T$  ist *Eins*, alle anderen sind *Null*)

Bei einer quadratischen Matrix  $A_{n \times n}$  heißen die Matricelemente mit gleicher Zeilen- und Spaltennummer **Diagonalelemente**:  $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$

Eine quadratische Matrix  $A_{n \times n}$  heißt

*Diagonalmatrix*

wenn *außerhalb* ihrer Diagonale

a	0	0
0	b	0
0	0	c

nur Nullstellen stehen (Bsp.  $E_{n \times n}$ )

*obere Dreiecksmatrix*

wenn *unterhalb* ihrer Diagonale

a	b	c
0	d	e
0	0	f

nur Nullstellen stehen

*untere Dreiecksmatrix*

wenn *oberhalb* ihrer Diagonale

a	0	0
b	c	0
d	e	f

nur Nullstellen stehen

## 25 Rechenoperationen mit Matrizen

**Addition „Matrix $_{m \times n} \pm$  Matrix $_{m \times n}$ “**

**Addition von Matrizen gleicher Dimension = Elementweise Addition**

*Regeln:*  $A + B = B + A$  und  $(A + B)^T = A^T + B^T$

**Multiplikation „Zahl  $\cdot$  Matrix“**

= Multiplikation jedes Matricelements mit dieser Zahl

*Regel:*  $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$  wobei  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

**Multiplikation „k-Zeilenvektor  $\cdot$  k-Spaltenvektor“**

als Baustein der Matrixmultiplikation:

„Skalarprodukt“

$$(z_1, \dots, z_k) \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} := z_1 \cdot s_1 + \dots + z_k \cdot s_k$$

**Multiplikation „Matrix $_{m \times k}$  · Matrix $_{k \times n}$ “**

= Multiplikation mehrerer  $k$ -Zeilenvekt. mit mehreren  $k$ -Spaltenvekt.

$C_{m \times n} := A_{m \times k} \cdot B_{k \times n}$  wird elementweise definiert:

Das Element  $c_{i,j}$  von  $C_{m \times n}$  ist das Ergebnis der Multiplikation

(Zeile Nr.  $i$  von  $A$ ) · (Spalte Nr.  $j$  von  $B$ ) ← je  $k$  Elemente

$$c_{i,j} := a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + \dots + a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

$$A_{m \times k} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,j} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\ b_{k,1} & \dots & b_{k,j} & \dots & b_{k,n} \end{pmatrix} = B_{k \times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{i,j} \end{pmatrix} =: (A \cdot B)_{m \times n}$$

*Regeln:*  $C(A + B) = CA + CB$  und  $(A + B)C = AC + BC$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \text{und} \quad (AB)^T = B^T A^T$$

VORSICHT  $A \cdot B = B \cdot A$  ist im Allgemeinen falsch

$A \cdot B$  ist nur definiert, wenn Spaltenzahl von  $A$  = Zeilenanzahl von  $B$

**Bsp. 1**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (1 \ 0)$  nicht definiert

**Bsp. 2** *Ausklammern eines zu jedem Element einer Matrix gemeinsamen Faktors:*

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

**Bsp. 3**  $(1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6; (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1; (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

**Bsp. 4**  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \text{ nicht definiert}$$

**Bsp. 5**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

**Bsp. 6**  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

In Bsp. 5 sind  $(A \cdot B)_{2 \times 2}$  und  $(B \cdot A)_{3 \times 3}$  nicht einmal vergleichbar, in Bsp. 6 sind  $(A \cdot B)_{2 \times 2}$  und  $(B \cdot A)_{2 \times 2}$  vergleichbar, aber verschieden.

### Zwei allgemeinere Beispiele (Eigenschaften)

**Bsp. 7** Für beliebige Matrizen  $A_{m \times n}$  (insbesondere Vektoren) ist

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{0}_{n \times k} &= \mathbf{0}_{m \times k} & \mathbf{A}_{m \times n} + \mathbf{0}_{m \times n} &= \mathbf{A}_{m \times n} \\ \mathbf{0}_{k \times m} \cdot \mathbf{A}_{m \times n} &= \mathbf{0}_{k \times n} & \mathbf{0}_{m \times n} + \mathbf{A}_{m \times n} &= \mathbf{A}_{m \times n} \end{array}$$

Die Nullmatrix spielt bei der „Matrixaddition“ die gleiche „neutrale“ Rolle wie die Zahl Null bei der Addition von Zahlen.

Anders als bei Zahlen kann aber bei der „Matrixmultiplikation“ aus der Gleichung  $A \cdot B = \mathbf{0}$  im Allgemeinen nicht gefolgert werden, dass  $\mathbf{A}$  oder  $\mathbf{B}$  die Nullmatrix ist (vgl. Bspe. 3 und 6)

*Bsp. 8* Für beliebige Matrizen  $A_{m \times n}$  (insbesondere Vektoren) ist

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{E}_{n \times n} &= \mathbf{A}_{m \times n} & \mathbf{E}_{n \times n} \cdot \mathbf{a}_{n \times 1} &= \mathbf{a}_{n \times 1} \\ \mathbf{E}_{m \times m} \cdot \mathbf{A}_{m \times n} &= \mathbf{A}_{m \times n} & \mathbf{a}_{1 \times n} \cdot \mathbf{E}_{n \times n} &= \mathbf{a}_{1 \times n} \end{array}$$

Die Einheitsmatrix spielt bei der Matrixmultiplikation die gleiche „neutrale“ Rolle wie die Zahl Eins bei der Multiplikation von Zahlen.

#### Anwendungsbeispiel

Bei einem *zweistufigen Produktionsprozess* sind die beiden einstufigen Bedarfstabellen (*Elemente*: Bedarf in Anzahl Einheiten Zeilenobjekt bei der Produktion einer Einheit Spaltenobjekt)  $M_{RZ}$  und  $M_{ZE}$  wie folgt gegeben:

Zwischenprodukte Z					Endprodukte E				
		$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$		$E_1$	$E_2$	$E_3$	
Rohstoffe	$R_1$	1	2	2	Zwischen-	$Z_1$	1	0	1
R	$R_2$	0	1	1	produkte	$Z_2$	0	2	1
					Z	$Z_3$	2	3	1

Rohstoffpreis  $r = (r_1, r_2) = (4, 5)$

Verkaufspreis  $p = (p_1, p_2, p_3) = (10, 100, 10)$

Preise werden als Zeile angegeben. Zwischenprodukte werden in diesem einfachen Modell weder gekauft noch verkauft. Ebenso erfordern feinere Wertbetrachtungen (*Produktionskosten/Gewinn*) ein erweitertes ökonomisches Modell. Wir betrachten hier, sehr vereinfacht, nur „Einkauf“ und „Verkauf“.

$\mathbf{M}_{RE} = \mathbf{M}_{RZ} \cdot \mathbf{M}_{ZE}$  Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung

$$\begin{array}{ll} M_{RE} &= M_{RZ} \cdot M_{ZE} & \text{Endprodukte } E \\ & & \mathbf{E}_1 \quad \mathbf{E}_2 \quad \mathbf{E}_3 \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } & \begin{array}{ll} \text{Rohstoffe } R_1 & 5 \quad 10 \quad 5 \\ R & R_2 \quad 2 \quad 5 \quad 2 \end{array} \end{array}$$

**$Z = M_{ZE} \cdot E$**  Zwischenproduktbedarf  $Z$  bei geg. Endproduktion  $E$

Für  $E = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$  ist der  $Z$ -Mengenvektor:  $Z = M_{ZE} \cdot E = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 45 \end{pmatrix}$

**$R = M_{RE} \cdot E = M_{RZ} \cdot Z$**  Rohstoffbedarf  $R$  bei geg. Endproduktion  $E$

Für  $E = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$  ist der  $R$ -Mengenvektor:  $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix}$

Zum Vergleich einstufig rückwärts gerechnet:  $R = M_{RZ} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix}$

**$r \cdot R$**  Rohstoffkosten

$$\text{Rohstoffkosten} = r \cdot R = 950$$

**$p \cdot E$**  Verkaufserlös

$$\text{Verkaufserlös} = p \cdot E = 1100$$

Ist nicht die Endproduktion  $E$  vorgegeben, sondern ein Rohstoffvorrat  $R$  bzw. ein Zwischenproduktvorrat  $Z$ , so muss die Matrixgleichung  $R = M_{RE} \cdot E$  bzw.  $Z = M_{ZE} \cdot E$  nach  $E$  „aufgelöst“ werden

▷ Lineare Gleichungssysteme