Elementare Matrizenrechnung

$m \times n$-Matrix von Zahlen *rechteckige Tabelle*

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ **Dimension der Matrix** *Sprechweise: „m Kreuz n“*

wobei $m =$ *Anzahl Zeilen,* $n =$ *Anzahl Spalten*

$a_{i,j}$ **Element der Matrix** *1. Index Zeilennr., 2. Index Spaltennr.*

Eine 1×1-Matrix wird als Zahl – ohne die Matrixklammern – geschrieben

Eine $m \times n$-Matrix $A_{m\times n}$ hat $m \cdot n$ Elemente $a_{i,j}$

23 Gleichheit $\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{B}_{m\times n}$ $:\Leftrightarrow$ elementweise Gleichheit

Gleichheit $A = B$:

1. A und B müssen gleiche Dimension haben

2. $a_{ij} = b_{i,j}$ *für alle Elemente im paarweisen Vergleich*

Bsp. $(1\ \ 2)_{1\times 2}$ und $\binom{1}{2}_{2\times 1}$ sind nicht vergleichbar (als Matrizen)

$(1\ \ 2)_{1\times 2} \neq (2\ \ 2)_{1\times 2}$ sind vergleichbar, aber verschieden

$(1\ \ 2)_{1\times 2} = (3^0\ \ \frac{4}{2})_{1\times 2}$ sind gleich

Transponierte $(A^T)_{n\times m} = (A_{m\times n})^T$ einer Matrix $A_{m\times n}$

Die *Zeilen* (bzw. Spalten) einer Matrix werden in unveränderter Reihenfolge als *Spalten* (bzw. Zeilen) aufgeschrieben.

Zweimaliges Transponieren führt zum Ausgangszustand zurück

Eigenschaft: $(A^T)^T = A$

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}$; $(a_1\ a_2)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Transponieren ist insbesondere für reine Darstellungszwecke sehr nützlich.

24 Einige spezielle Matrizen $\boldsymbol{A_{m\times n}}$

Äußere Formen

$\boldsymbol{m = n}$	**quadratische Matrix**	*d.h. Zeilenanzahl = Spaltenanzahl*
$\boldsymbol{m = 1}$	$\boldsymbol{n}$**-Zeilenvektor**	n = *Elementeanzahl der einen Zeile*
$\boldsymbol{n = 1}$	$\boldsymbol{m}$**-Spaltenvektor**	m = *Elementeanzahl der einen Spalte*

Innere Formen

$\mathbf{0}_{m\times n}$	**Nullmatrix**	*Zeilen und* n *Spalten nur Nullen*
$\boldsymbol{0_n, (0_n)^T}$	**Nullspalte, Nullzeile**	*Spalte bzw. Zeile mit* n *Nullen*
$\mathbf{1}_{m\times n}$	**Einsenmatrix**	*Zeilen und* n *Spalten nur Einsen*
$\boldsymbol{1_n, (1_n)^T}$	**Einsenspalte, Einsenzeile**	*Spalte bzw. Zeile mit* n *Einsen*

Wir schreiben *Einsen*matrix statt *Eins*matrix um jede Verwechslung mit der (folgenden) *Einheits*matrix auszuschließen

Mischformen

$\mathbf{E}_{n\times n}$ **Einheitsmatrix** $\mathbf{E}_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{e_n^{j\cdot}}$ $\boldsymbol{j}$**−te Spalte von** $\mathbf{E}_{\boldsymbol{n\times n}}$ **=** $\boldsymbol{j}$**−ter Einheits<u>spalten</u>vektor**

(das $\boldsymbol{j}$-te Element von $\boldsymbol{e_n^{j\cdot}}$ ist *Eins*, alle anderen sind *Null*)

$\boldsymbol{(e_n^{i\cdot})^T}$ $\boldsymbol{i}$**−te Zeile von** $\mathbf{E}_{\boldsymbol{n\times n}}$ **=** $\boldsymbol{i}$**−ter Einheits<u>zeilen</u>vektor**

(das $\boldsymbol{i}$-te Element von $\boldsymbol{(e_n^{i\cdot})^T}$ ist *Eins*, alle anderen sind *Null*)

Bei einer quadratischen Matrix $A_{n\times n}$ heißen die Matrixelemente mit gleicher Zeilen- und Spaltennummer **Diagonalelemente:** $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$

Eine quadratische Matrix $A_{n\times n}$ heißt

Diagonalmatrix wenn *außerhalb* ihrer Diagonale nur Nullstellen stehen (Bsp. $\boldsymbol{E_{n\times n}}$)

a	**0**	**0**
0	b	**0**
0	**0**	c

obere Dreiecksmatrix wenn *unterhalb* ihrer Diagonale nur Nullstellen stehen

a	b	c
0	d	e
0	**0**	f

untere Dreiecksmatrix wenn *oberhalb* ihrer Diagonale nur Nullstellen stehen

a	**0**	**0**
b	c	**0**
d	e	f

25 Rechenoperationen mit Matrizen

Addition „Matrix$_{m\times n}$± Matrix$_{m\times n}$ “

Addition von Matrizen gleicher Dimension = Elementweise Addition

Regeln: $\boldsymbol{A+B=B+A}$ **und** $\boldsymbol{(A+B)^T=A^T+B^T}$

Multiplikation „Zahl · Matrix“

= Multiplikation jedes Matrixelements mit dieser Zahl

Regel: $\boldsymbol{\alpha A+\beta A=(\alpha+\beta)A}$ *wobei* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Multiplikation „k-Zeilenvektor · k-Spaltenvektor“

als Baustein der Matrixmultiplikation: *„Skalarprodukt“*

$$\boldsymbol{(z_1,\ldots,z_k)\cdot\begin{pmatrix}s_1\\ \vdots\\ s_k\end{pmatrix}:=z_1\cdot s_1+\ldots+z_k\cdot s_k}$$

Multiplikation „Matrix$_{m\times k}\cdot$ Matrix$_{k\times n}$"

= Multiplikation mehrerer k-Zeilenvekt. mit mehreren k-Spaltenvekt.

$C_{m\times n} := A_{m\times \underline{k}} \cdot B_{\underline{k}\times n}$ wird elementweise definiert:

Das Element $c_{i,j}$ von $C_{m\times n}$ ist das Ergebnis der Multiplikation

(Zeile Nr. i von A) $\cdot$ (Spalte Nr. j von B) $\leftarrow$ je k Elemente

$$\boldsymbol{c_{i,j} := a_{i,1}\cdot b_{1,j} + a_{i,2}\cdot b_{2,j} + \ldots + a_{i,k}\cdot b_{k,j}}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} b_{1,1} & \ldots & b_{1,j} & \ldots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ldots \\ b_{k,1} & \ldots & b_{k,j} & \ldots & b_{k,n} \end{array}\right\} = B_{k\times n}$$

$$A_{m\times k} = \left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1} & \ldots & a_{1,k} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,k} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} \\ c_{i,j} \\ \\ \end{array}\right\} =: (A\cdot B)_{m\times n}$$

Regeln: $\boldsymbol{C(A+B) = CA + CB}$ **und** $\boldsymbol{(A+B)C = AC + BC}$

$\boldsymbol{(A\cdot B)\cdot C = A\cdot (B\cdot C)}$ **und** $\boldsymbol{(AB)^T = B^T A^T}$

VORSICHT $\boldsymbol{A\cdot B = B\cdot A}$ **ist im Allgemeinen falsch**
$\boldsymbol{A\cdot B}$ *ist nur definiert, wenn Spaltenzahl von* $\boldsymbol{A}$ = *Zeilenanzahl von* $\boldsymbol{B}$

Bsp. 1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (1\ 0)$ nicht definiert

Bsp. 2 *Ausklammern eines* zu jedem Element einer Matrix *gemeinsamen Faktors:*

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Bsp. 3 $(1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6;\ (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1;\ (0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Bsp. 4
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad \text{nicht definiert}$$

Bsp. 5
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Bsp. 6 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

In Bsp. 5 sind $(A \cdot B)_{2\times 2}$ und $(B \cdot A)_{3\times 3}$ nicht einmal vergleichbar, in Bsp. 6 sind $(A \cdot B)_{2\times 2}$ und $(B \cdot A)_{2\times 2}$ vergleichbar, aber verschieden.

Zwei allgemeinere Beispiele (Eigenschaften)

Bsp. 7 Für beliebige Matrizen $A_{m\times n}$ (insbesondere Vektoren) ist

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} \mathbf{A_{m\times n}} \cdot \mathbf{0_{n\times k}} & = & \mathbf{0_{m\times k}} & \mathbf{A_{m\times n}} + \mathbf{0_{m\times n}} & = & \mathbf{A_{m\times n}} \\ \mathbf{0_{k\times m}} \cdot \mathbf{A_{m\times n}} & = & \mathbf{0_{k\times n}} & \mathbf{0_{m\times n}} + \mathbf{A_{m\times n}} & = & \mathbf{A_{m\times n}} \end{array}$$

Die Nullmatrix spielt bei der „Matrixaddition" die gleiche „neutrale" Rolle wie die Zahl Null bei der Addition von Zahlen.

> Anders als bei Zahlen kann aber bei der „Matrixmultiplikation" aus der Gleichung $A \cdot B = \mathbf{0}$ im Allgemeinen nicht gefolgert werden, dass $\boldsymbol{A}$ oder $\boldsymbol{B}$ die Nullmatrix ist (vgl. Bspe. 3 und 6)

Bsp. 8 Für beliebige Matrizen $A_{m\times n}$ (insbesondere Vektoren) ist

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} \mathbf{A_{m\times n} \cdot E_{n\times n}} &=& \mathbf{A_{m\times n}} & \mathbf{E_{n\times n} \cdot a_{n\times 1}} &=& \mathbf{a_{n\times 1}} \\ \mathbf{E_{m\times m} \cdot A_{m\times n}} &=& \mathbf{A_{m\times n}} & \mathbf{a_{1\times n} \cdot E_{n\times n}} &=& \mathbf{a_{1\times n}} \end{array}$$

Die Einheitsmatrix spielt bei der Matrixmultiplikation die gleiche „neutrale" Rolle wie die Zahl Eins bei der Multiplikation von Zahlen.

Anwendungsbeispiel

Bei einem *zweistufigen Produktionsprozess sind* die beiden einstufigen Bedarfstabellen (*Elemente:* Bedarf in Anzahl Einheiten Zeilenobjekt bei der Produktion einer Einheit Spaltenobjekt) M_{RZ} und M_{ZE} wie folgt gegeben:

Zwischenprodukte Z

		Z_1	Z_2	Z_3
Rohstoffe	R_1	1	2	2
R	R_2	0	1	1

Endprodukte E

		E_1	E_2	E_3
Zwischen-	Z_1	1	0	1
produkte	Z_2	0	2	1
Z	Z_3	2	3	1

Rohstoffpreis $r = (r_1, r_2) = (4, 5)$
Verkaufspreis $p = (p_1, p_2, p_3) = (10, 100, 10)$

Preise werden als Zeile angegeben. Zwischenprodukte werden in diesem einfachen Modell weder gekauft noch verkauft. Ebenso erfordern feinere Wertbetrachtungen (Produktionskosten/ Gewinn) ein erweiteres ökonomisches Modell. Wir betrachten hier, sehr vereinfacht, nur „Einkauf" und „Verkauf" .

$\mathbf{M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE}}$ Bedarfstabelle der Gesamtverarbeitung

$$M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$ d.h.

Endprodukte *E*

		E_1	E_2	E_3
Rohstoffe	R_1	5	10	5
R	R_2	2	5	2

$\mathbf{Z} = \mathbf{M_{ZE}} \cdot \mathbf{E}$ Zwischenproduktbedarf Z bei geg. Endproduktion E

Für $E = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist der Z-Mengenvektor: $Z = M_{ZE} \cdot E = \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 45 \end{pmatrix}$

$\mathbf{R} = \mathbf{M_{RE}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{M_{RZ}} \cdot \mathbf{Z}$ Rohstoffbedarf R bei geg. Endproduktion E

Für $E = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist der R-Mengenvektor: $R = M_{RE} \cdot E = \begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix}$

Zum Vergleich einstufig rückwärts gerechnet: $R = M_{RZ} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix}$

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}$ Rohstoffkosten Rohstoffkosten $= r \cdot R = 950$

$\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ Verkaufserlös Verkaufserlös$= p \cdot E = 1100$

Ist nicht die Endproduktion E vorgegeben, sondern ein Rohstoffvorrat R bzw. ein Zwischenproduktvorrat Z, so muss die Matrixgleichung $R = M_{RE} \cdot E$ bzw. $Z = M_{ZE} \cdot E$ nach E „aufgelöst“ werden ▷ Lineare Gleichungssysteme