Lineare Gleichungssysteme I (Matrixgleichungen)

Eine lineare Gleichung mit einer Variablen x hat bei Zahlen a, b, x die Form $ax = b$. Falls hierbei der Kehrwert von a gebildet werden darf ($a \neq 0$), kann eindeutig aufgelöst werden zu $x = a^{-1}b$.
Für **Matrixgleichungen (Gleichungen zwischen Matrizen)** mit einer unbekannten Matrix X stellt sich die entsprechende Frage nach der Auflösbarkeit:

Gegeben: $A \cdot X = B$ *bzw.* $X \cdot A = B$ *Gesucht:* $X = ?$

Matrixgleichungen finden insbesondere Anwendung bei Untersuchungen mehrstufiger Produktionsprozesse, Verflechtungsanalysen (Input/Output-Analyse) im Mikro- und Makrobereich, in der Linearen Optimierung sowie bei Übergangsmodellen in der Marktforschung (stochastische Matrizen) und bei Zeitreihenanalysen

▷ *Ökonomische Beispiele*

Die für Umformungen von Matrixgleichungen benötigten Begriffe werden unten zusammengestellt. Danach wird besprochen:

ein rechnerisches Lösungsverfahren, das bei jeder Matrixgleichung alle Lösungsmöglichkeiten für X liefert: „Gauß-Jordan-Algorithmus“ ▷ *Thema 3.3*

26 Inverse (Kehrmatrix) $A^{-1}_{n\times n}$ einer quadratischen Matrix $A_{n\times n}$

Die inverse Matrix $A^{-1}_{n\times n}$ zu $A_{n\times n}$ kann existieren. Falls es sie gibt, so ist sie eindeutig bestimmt durch jede der beiden Matrixgleichungen

Definierende Eigenschaft $\boldsymbol{A^{-1}_{n\times n} \cdot A_{n\times n} = E_{n\times n} = A_{n\times n} \cdot A^{-1}_{n\times n}}$

Bezeichnung Eine Matrix heißt **invertierbar** *(auch: nicht-singulär)*, wenn sie quadratisch ($\boldsymbol{n \times n}$-Matrix) ist und ihre Inverse existiert

Methodische Berechnung von Inversen ▷ *Thema 3.3*

Test für $n \times n$-Matrizen A und B

- Ist $A \cdot B = E_{n\times n}$, so ist auch $B \cdot A = E_{n\times n}$ und $A^{-1} = B$ und $B^{-1} = A$
- Ist $A \cdot B \neq E_{n\times n}$, so ist (falls A oder B überhaupt invertierbar sind) weder $A^{-1} = B$ noch $B^{-1} = A$

Bsp. 1

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{3\times 3}}$$

A und B sind zueinander inverse Matrizen: $A^{-1} = B$ und $B^{-1} = A$

Bsp. 2 **Leicht erkennbare Muster <u>nicht</u>-invertierbarer Matrizen**

- *Besitzt eine Matrix A ungleiche Zeilen- und Spaltenzahl*, so ist sie nicht invertierbar.
- *Enthält eine Matrix A eine Nullenzeile (bzw. Nullenspalte)*, so ist im Produkt $A \cdot X$ (bzw. $X \cdot A$) die entsprechende Zeile (bzw. Spalte) ebenfalls eine Nullenzeile (bzw. Nullenspalte) – das Produkt kann also nie, für keine Matrix X gleich der Einheitsmatrix sein
- *Ist in einer Matrix A eine Zeile (bzw. Spalte) ein Vielfaches einer anderen Zeile (bzw. Spalte),* so wiederholt sich diese Eigenschaft im Produkt $A \cdot X$ (bzw. $X \cdot A$) mit den entsprechenden Zeilen (bzw. Spalten) – das Produkt kann also nie, für keine Matrix X, gleich der Einheitsmatrix sein, die eine solche Eigenschaft eben nicht aufweist

Bsp. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -0 \end{pmatrix}$ sind nicht invertierbar

Bsp. 3 **Leicht erkennbare Muster invertierbarer Matrizen**

- *Eine Diagonalmatrix A, bei der kein Diagonalelement gleich Null ist*, hat als Inverse die Diagonalmatrix der Kehrwerte der Diagonalelemente von A

  Bsp. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- *Eine Einheitsmatrix, deren Zeilen (bzw. Spalten) umgeordnet sind,* hat als Inverse ihre transponierte Matrix

27 Rechenregeln für Inverse von quadratischen Matrizen

(R1)	$\boldsymbol{A^{-1} \cdot A = E = A \cdot A^{-1}}$	definierende Eigenschaften
(R2)	$\boldsymbol{(A^{-1})^{-1} = A}$	falls $\boldsymbol{A}$ invertierbar
(R3)	$\boldsymbol{(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}}$	falls die Zahl $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$ und $\boldsymbol{A}$ invertierbar
(R4)	$\boldsymbol{(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T}$	falls $\boldsymbol{A}$ invertierbar
(R5)	$\boldsymbol{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$	falls $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ invertierbar
(R6)	$\boldsymbol{P^{-1} = P^T}$	falls $\boldsymbol{P}$ aus den umsortierten Zeilen (bzw. aus den umsortierten Spalten) der Einheitsmatrix besteht

Regel (R4) bedeutet: Aus der Invertierarkeit von A folgt die Invertierbarkeit von A^T und die Gleichheit $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
Regel (R5) bedeutet: Aus der Invertierbarkeit von A und B folgt die Invertierbarkeit von $A \cdot B$ und die Gleichheit $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

VORSICHT *Die Umkehrung von (R5) ist nur dann richtig, wenn A und B beide quadratisch sind,* d.h. dann folgt aus der Invertierbarkeit des Produktes $A \cdot B$ auch die Invertierbarkeit der einzelnen Matrix-Faktoren A und B. *Bei vielen ökonomischen Anwendungen sind die beiden Faktoren aber typischerweise nicht quadratisch:* Z.B. liegt in der *Zeitreihenanalyse* meist eine *Beobachtungsmatrix* $A_{m \times n}$ mit $m > n$ vor, wobei $m =$ Anzahl Beobachtungsperioden, $n =$ Anzahl erklärender Variabler. Das für weitere Umformungen wichtige Produkt $(A^T_{m \times n} \cdot A_{m \times n})$, eine $n \times n$-Matrix, ist dabei – per Modellvoraussetzung für die Variablen – invertierbar.

28 Umformungen von Matrixgleichungen *Dimensionen beachten*

Additon $\boldsymbol{A_{m\times n} = B_{m\times n} \Leftrightarrow A_{m\times n} + C_{m\times n} = B_{m\times n} + C_{m\times n}}$

Rechts ausklammern $\boldsymbol{X_{m\times n} - A_{m\times m} \cdot X_{m\times n} = (E - A)_{m\times m} \cdot X_{m\times n}}$

Links ausklammern $\boldsymbol{X_{m\times n} - X_{m\times n} \cdot A_{n\times n} = X_{m\times n} \cdot (E - A)_{n\times n}}$

Mit Hilfe inverser Matrizen, deren Existenz z.B. aufgrund theoretischer Überlegungen (ökonomische Modellannahmen) vorausgesetzt werden kann, sind abstrakte Umformungen von Matrixgleichungen zu allgemeinen Lösungen möglich:

Auflösen von links, falls $A_{m\times m}$ invertierbar

$$\boldsymbol{A_{m\times m} \cdot X_{m\times n} = B_{m\times n} \Leftrightarrow X_{m\times n} = A^{-1}_{m\times m} \cdot B_{m\times n}}$$

Auflösen von rechts, falls $\boldsymbol{A_{n\times n}}$ invertierbar

$$\boldsymbol{X_{m\times n} \cdot A_{n\times n} = B_{m\times n} \Leftrightarrow X_{m\times n} = B_{m\times n} \cdot A^{-1}_{n\times n}}$$

Das ganze noch einmal, in einprägsamer Kurzform (auf die Dimensionen achten wir bei der konkreten Ausführung):

Addition	$\boldsymbol{A = B \Leftrightarrow A + C = B + C}$
Rechts ausklammern	$\boldsymbol{X - A \cdot X = (E - A) \cdot X}$
Links ausklammern	$\boldsymbol{X - X \cdot A = X \cdot (E - A)}$
Auflösen von links, falls A invertierbar	$\boldsymbol{A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B}$
Auflösen von rechts, falls A invertierbar	$\boldsymbol{X \cdot A = B \Leftrightarrow X = B \cdot A^{-1}}$

Bsp. 4 Gegeben ist die folgende Matrixgleichung, wobei X unbekannt ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Damit die Gleichung definiert ist, muss X die Dimension 2×3 haben.

Auflösen von links und rechts liefert

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bsp. 5

Die beiden $n \times n$-Matrizen A, C in der folgenden Matrixgleichung seien invertierbar, X ist unbekannt: $A \cdot X \cdot C = B$
Auflösen nach X liefert die äquivalente Gleichung: $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$. Falls auch noch B invertierbar ist, ist auch das Produkt X invertierbar und

$$X^{-1} = (A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1})^{-1} = C \cdot B^{-1} \cdot A$$

▷ *Nr. 30, (R5)*

Bsp. 6 Die Inverse der Matrix

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Mit dieser Information kann die Lösung X der beiden Matrixgleichungstypen $A \cdot X = B$ bzw. $X \cdot A = B$ direkt angegeben werden, z.B.:

6 a) $A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ hat die Lösung $X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \\ 7 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

6 b) $X \cdot A = (1\ \ 1\ \ 1)$ hat die Lösung $X = (1\ \ 1\ \ 1) \cdot A^{-1} = (5\ \ 0\ \ -5)$

29 Lineares Gleichungssystem LGS $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$

m Gleichungen, m Zielwerte b_i, n Variablen x_j, $m \cdot n$ Koeffizienten $a_{i,j}$

$$\begin{array}{ccccccc}
\boldsymbol{a_{1,1} \cdot x_1} & + & \dots & + & \boldsymbol{a_{1,n} \cdot x_n} & = & \boldsymbol{b_1} \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{a_{m,1} \cdot x_1} & + & \dots & + & \boldsymbol{a_{m,n} \cdot x_n} & = & \boldsymbol{b_m}
\end{array}$$

In Matrixschreibweise: $\boldsymbol{A \cdot x = b}$

Koeffizientenmatrix **(m Zeilen und n Spalten)** $\boldsymbol{A_{m \times n}}$

Variablenvektor **(Spalte mit n Elementen $x_1, \dots, x_n$)** $\boldsymbol{x_{n \times 1}}$

Zielvektor **(Spalte mit m Elementen $b_1, \dots, b_m$)** $\boldsymbol{b_{m \times 1}}$

Bsp. 7

Im Anwendungsbeispiel von Thema 3.1 ist $M_{RE} \cdot E = R$ ein LGS, bei dem M_{RE} die Koeffizientenmatrix, ein verfügbarer Rohstoffvektor R den Zielvektor und E den Variablenvektor darstellen, z.B.:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix} \text{ für gegebenes } \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix}$$

In Gleichungsform (2 Gleichungen, 2 Zielwerte, 3 Variablen):

$$\begin{array}{ccccccc}
5 \cdot E_1 & + & 10 \cdot E_2 & + & 5 \cdot E_3 & = & 150 \\
2 \cdot E_1 & + & 5 \cdot E_2 & + & 2 \cdot E_3 & = & 70
\end{array}$$