Lineare Gleichungssysteme II, Gauß-Jordan Algorithmus

Ein $m \times n$-**Lineares Gleichungssystem (LGS)** ist in **Gleichungsform**

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{1,n} \cdot x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m,1} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{m,n} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

oder gleichwertig in **Matrixschreibweise** $A_{m\times n} \cdot x_{n\times 1} = b_{m\times 1}$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$$

oder gleichwertig in **Tabellenform** gegeben:

Variablen (Spaltenfaktoren)				Zielvektor	
x_1	$\dots$	x_n	$(=)$	b	
$a_{1,1}$	$\dots$	$a_{1,n}$		b_1	erste Gleichung
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
$a_{m,1}$	$\dots$	$a_{m,n}$		b_m	m-te Gleichung
Koeffizientenmatrix A				Zielvektor b	
Erweiterte Koeffizientenmatrix $(A\|b)$					

Bsp. 1 (Produktionsprozess, gesuchte Variablen sind die Endproduktmengen)

(1)
$$\begin{array}{ccccccc} 5 \cdot E_1 & + & 10 \cdot E_2 & + & 5 \cdot E_3 & = & 150 \\ 2 \cdot E_1 & + & 5 \cdot E_2 & + & 2 \cdot E_3 & = & 70 \end{array}$$

(2)
$$M_{RE} \cdot E = R \text{ mit } \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 70 \end{pmatrix}$$

(3)

E_1	E_2	E_3	$(=)$ b	
5	10	5	150	*1. Gleichung*
2	5	2	70	*2. Gleichung*

Zur folgenden Theorie gibt es ausführliche Beispiele, die „parallel“ besprochen werden, der besseren Übersichtlichkeit wegen aber (nach den Schemata) gesammelt aufgeführt sind.

30 Jeder Variablenvektor x, der $A \cdot x = b$ erfüllt, heißt Lösung des LGS

Ein LGS hat

entweder	• **keine Lösung**	*unlösbares LGS*
oder	• **genau eine Lösung**	*eindeutig lösbares LGS*
oder	• **unendliche viele Lösungen**	*LGS mit freien Variablen*

Das unten folgende Lösungsverfahren basiert auf der systematischen Anwendung von *elementaren Umformungen* eines LGS, die *auf die erweiterte Koeffizientenmatrix angewandt* werden.

31 Elementare Zeilenumformungen

Die Lösungsmenge eines LGS bleibt unverändert bei

- Vertauschung der Zeilen (= Reihenfolgenänderung der Gleichungen)
- Multiplikation einer Zeile/Gleichung mit einem Faktor ungleich Null
- Addition einer Zeile/Gleichung zu einer anderen
- Vertauschung der Spalten bei gleichzeitigem Mittauschen der Variablen, d.h. der (gesuchten) Spaltenfaktoren $x_1, \dots, x_n$

Jedes LGS $A \cdot x = b$ kann mittels dieser vier elementaren Umformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ in ein „äquivalentes“ LGS $A^* \cdot x = b^*$ mit erweiterte Koeffizientenmatrix $(A^*|b^*)$ umgeformt werden,

- das die **gleiche Lösungsmenge wie $\boldsymbol{A \cdot x = b}$ liefert,**
- aus dem diese **Lösungsmenge direkt ablesbar** ist.

Der Stern $*$ steht zur Symbolisierung der Umformung zu etwas (hinsichtlich der gesuchte Lösungsmenge) Gleichwertigem.

Das systematische Vorgehen dieser Umformung heißt *Gauß-Jordan-Algorithmus* und das Ergebnis $A^* \cdot x = b^*$ bzw. $(A^*|b^*)$ heißt „kanonische Form“ des LGS $A \cdot x = b$. Wir nennen $(A^*|b^*)$ einfach *Schlusstabelle (Schlusstableau).*

32 Gauß-(Jordan)-Algorithmus zur Lösung eines LGS $\boldsymbol{A \cdot x = b}$

Schlusstableau *Ziel $(A^*|\ b^*)$ der Umformungen*

Koeffiz'matrix A^* und (ggf. vertauschte) Variable							Zielvekt. b^*
x_1^*	$\dots$	x_r^*	x_{r+1}^*	$\dots$	x_n^*	$(=)$	b^*
1		**0**	$a_{1,r+1}^*$	$\dots$	$a_{1,n}^*$		b_1^*
	$\ddots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
0		**1**	$a_{r,r+1}^*$	$\dots$	$a_{r,n}^*$		b_r^*
0	$\dots$	0	0	$\dots$	0		b_{r+1}^*
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
0	$\dots$	0	0	$\dots$	0		b_m^*

($\mathsf{E}_{r\times r}$: die ersten r Zeilen und r Spalten)

Ziel in Kurzform: Links oben steht eine $(r \times r)$-Einheitsmatrix, unterhalb allenfalls Nullzeilen. Zur Bedeutung von r sieht unten → Lösungsmenge: Schritt 6

1 Ausgangspunkt *LGS in Tabellenform*

x_1	$\dots$	x_n	$(=)$ b
$a_{1,1}$	$\dots$	$a_{1,n}$	b_1
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$a_{m,1}$	$\dots$	$a_{m,n}$	b_m

$\leftarrow (A|b)$

- ▷ Falls $(A|b) = 0$ (die Nullmatrix), so ist *jeder* Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ein Lösungsvektor → fertig
- ▷ Falls $(A|b) \neq 0$
  - ▷ Falls $m > 1$ und $A \neq 0$ → weiter mit Schritt 2
  - ▷ Falls $m > 1$ und $A = 0$, oder falls $m = 1$ (d.h. nur eine Gleichung), so liegt schon ein Schlusstableau vor → weiter mit Schritt 6

2 Erste Tauschaktion *[Bei Spaltentausch: Variable mittauschen!]*

Tausche – falls erforderlich – Zeilen von $(A|b)$ und Spalten von A, bis links oben eine Zahl $\neq 0$ steht. Zeile 1 und Spalte 1 sind nun für weitere Tauschaktionen auf Dauer

„gesperrt“ . Zeile 1 (der erweiterten Koeffizientenmatrix) wird **aktuelle Basiszeile,** Spalte 1 wird **aktuelle Basisspalte** und das Element links oben **aktuelles Basiselement**

$\rightarrow$ weiter mit Schritt 4

3 Weitere Tauschaktion *[Bei Spaltentausch: Variable mittauschen!]*

▷ Tausche – falls *möglich* und erforderlich – nicht gesperrte Zeilen und Spalten der Koeffizientenmatrix, bis eine Zahl $\neq 0$ links oben im erlaubten Bereich (d.h. ohne alle gesperrten Zeilen und Spalten) steht. Diese Zahl wird **aktuelles Basiselement**, die zugehörige Spalte/Zeile (der erweiterten Koeffizientenmatrix) wird **aktuelle Basisspalte/aktuelle Basiszeile.** Letztere sind nun für weitere Tauschaktionen auf Dauer „gesperrt“

$\rightarrow$ weiter mit Schritt 4

▷ Ist ein derartiger Tausch *nicht möglich*, so liegt bereits ein Schlusstableau vor.

4 Eliminationsschritt *(Basisspalte wird zu Einheitsspaltenvektor)*

(i) *Das aktuelle Basiselement ist/wird zu Eins:*
Dividiere jedes Element der Basiszeile durch das Basiselement

(ii) *Andere Elemente der Basisspalte sind/werden zu Null:*
Prüfe einzeln jede Nicht-Basiszeile:
Steht in einer *Nicht-Basiszeile* in der *Basisspalte* eine Zahl $z \neq 0$, so subtrahiere von dieser Zeile das z-fache der Basiszeile

$\rightarrow$ weiter mit Schritt 5

5 Prüfung auf Unlösbarkeit
Ist in der *Koeffizientenmatrix* eine Nullzeile entstanden?

▷ Nein: $\rightarrow$ weiter mit Schritt 3

▷ Ja: Ist das zugehörige Element des Zielvektors $\neq 0$?

▷ Ja: Das LGS ist dann **nicht lösbar** $\rightarrow$ fertig

▷ Nein: $\rightarrow$ weiter mit Schritt 3

6 Bestimmung der Lösungsmenge aus dem Schlusstableau

▷ Ist eine der zu Nullzeilen der Koeffizientenmatrix gehörenden Zahlen des Zielvektors $\neq 0$, so ist das LGS **nicht lösbar:** $L = \emptyset$

- Oft wird *bei Unlösbarkeit* das Schlusstableau mit elementaren Zeilenumformungen „verdeutlichend“ noch so äquivalent verändert, dass der nicht erreichbare Zielvektor zum Einheitsvektor wird (vgl. Nr. 38a).

Andernfalls ist das LGS lösbar. Die Anzahl der Lösungen hängt vom Vergleich von r und n ab (der Fall $r > n$ kann nicht auftreten):

- ▷ Ist $\boldsymbol{r = n}$, so gibt es **genau eine Lösung,** die *ohne weitere Rechnung* aus der tabellarischen Form direkt in Gleichungsform übersetzt wird
- ▷ Ist $\boldsymbol{r < n}$, so gibt es **unendlich viele Lösungen:**
  $\boldsymbol{n-r}$ Variable sind frei wählbar, die übrigen $\boldsymbol{r}$ Variablen ergeben sich aus den $\boldsymbol{r}$ Gleichungen des Schlusstableaus (ohne Nullzeilen). Eine mögliche Auswahl solcher $\boldsymbol{n-r}$ „freier" und $\boldsymbol{r}$ festgelegter" Variablen ist durch das Schlusstableau getroffen und kann wiederum *ohne weitere Rechnung* aus dieser tabellarischen Form direkt in Gleichungsform übersetzt werden. (Andere Auswahlen verändern nicht die Lösungen, sondern nur deren Darstellungsform.)

VORSICHT Falls bei der Umformung Spaltenvertauschungen vorgenommen wurden, sollte beim Aufschreiben der Lösungsmenge darauf geachtet werden, dass die Variablen nun *in der ursprünglichen Reihenfolge* genannt werden.

Jede bei den Schritten 2-4 (Elimination) vorgenommene elementare Zeilenumformung muss nachvollziehbar „protokolliert" werden

33 Die obige Zahl r heißt Rang der Matrix A, kurz rang($\boldsymbol{A}$). Es gilt:

$$1 \leq r \leq \min(m, n) = \textit{Minimum aus Zeilen- und Spaltenanzahl}$$

$\boldsymbol{r}$ **= rang($\boldsymbol{A}$) ist gleichzeitig**

- die maximale Anzahl der linear unabhängigen *Zeilen* von $\boldsymbol{A}$, d.h. **die Anzahl nicht-redundanter Gleichungen des LGS**
- die maximale Anzahl der linearen unabhängigen *Spalten* von $\boldsymbol{A}$, d.h. **die Anzahl der durch das LGS festgelegten Variablenwerte**

Eigenschaft: **rang($\boldsymbol{A}$) = rang($\boldsymbol{A^T}$)**

• *$m - r$ Gleichungen sind überflüssig bzw. $n - r$ Variable sind frei wählbar*

34 Hierbei heißen k Vektoren (Zeilen- bzw. Spaltenvektoren) mit je n Elementen **linear unabhängig,** wenn eine Linearkombination (= Summe von Vielfachen) der Vektoren mit dem Ergebnis Nullvektor nur möglich ist, wenn jeder Vektor mit dem Faktor Null eingeht – d.h. keiner dieser k Vektoren ist eine Linearkombination der anderen $k-1$ Vektoren (= nicht linear abhängig von diesen). In Matrixschreibweise ausgedrückt: **Die Spalten einer Matrix $\boldsymbol{A}$ sind linear unabhängig, wenn das LGS $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (Nullvektor) die eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (Nullvektor) hat**

35 Anwendung des GJ-Algorithmus auf spezielle Fragestellungen insbes.: Weitere, am Schlusstableau ablesbare Informationen

a *Gefragt:* **Rang $\boldsymbol{r}$ einer Matrix $\boldsymbol{A}$**

Vorgehen: Gaußalgorithmus für A durchführen, den Rang am Schlusstableau ablesen (= Dimension der erzeugten Einheitsmatrix = Anzahl der „Treppenstufen“)

Hinweis: Nach der Durchführung des GJ-Algorithmus eines LGS $A \cdot x = b$ lesen wir den Rang von A und $(A|b)$ am Schlusstableau ab. Das LGS $A \cdot x = b$ ist lösbar genau dann, wenn $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$

b *Gefragt:* Prüfung der **linearen Unabhängigkeit bzw. linearen Abhängigkeit von $\boldsymbol{k}$ Vektoren** (mit jeweils n Elementen)

Vorgehen: Fasse die Vektoren zu einer Matrix A zusammen (schreibe die Vektoren als Spalten, egal ob es sich um Zeilen- oder Spaltenvektoren handelt); führe den Gaußalgorithmus für das LGS $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ durch.

- ▷ Die Vektoren sind linear unabhängig, falls sich die *eindeutige* Lösung $x = 0$ (Nullvektor) ergibt
- ▷ andernfalls sind sie linear abhängig und die Lösung x gibt an welche Linearkombination der Vektoren zum Nullvektor wird.

c *Gefragt:* Bestimmung der **Anzahl „überflüssiger“ Gleichungen** eines *lösbaren* LGS $A \cdot x = b$

Vorgehen: Die Anzahl überflüssiger Gleichungen ist gleich der Anzahl der im Schlusstableau $(A^*|b^*)$ entstandenen Nullzeilen.

d **Simultane Durchführung des GJ-Algorithmus für mehrere Zielvektoren**

Gefragt: Für eine feste Koeffizientenmatrix A die Lösungsmengen
L_b zum LGS $A \cdot x = b$, L_c zum LGS $A \cdot x = c$ usw. ...

Vorgehen: *Ein* Durchgang des Algorithmus mit der rechts um alle Zielvektoren (Spalten) erweiterten Tabelle: $A|b|c| \ldots$
Die Lösungsmengen $L_b, L_c, \ldots$ werden – wie bei einem Einzeldurchgang – aus dem jeweils zugehörigen Schlusstableau $(A^*|b^*), (A^*|c^*), \ldots$ direkt abgelesen.

Hinweis: Dies erlaubt die Lösung/Lösbarkeitsprüfung einer **Matrixgleichung** $\boldsymbol{A \cdot X = B}$ wie folgt: $\boldsymbol{(A|B) \to GJA \to (A^*|B^*)}$
Für die einzelnen Spalten $b, c, \ldots$ der rechts stehenden Matrix B werden simultan die LGSe $A \cdot x = b, A \cdot x = c, \ldots$ bearbeitet.

- ▷ Ist eines der LGSe nicht lösbar, so hat die gesamte Matrixgleichung $A \cdot X = B$ keine Lösung
- ▷ Andernfalls ergibt sich die Lösungsmenge für X, deren Elemente also Matrizen sind, aus allen Möglichkeiten, eine Matrix X zu bilden mit Spalte 1 aus L_b, Spalte 2 aus $L_c, \ldots$

e **Inversenberechnung** (Spezielle Form einer simultanen Durchführung = Lösung der Matrixgleichung $A_{n\times n} \cdot X = \mathbf{E}_{n\times n}$)

Gefragt: Existiert die Inverse einer $n \times n$-Matrix? Falls ja, $A^{-1} =?$

Vorgehen: Ein simultaner Durchgang des Algorithmus mit den Spalten $\mathbf{e}_n^{j\cdot}$ der $n \times n$-Einheitsmatrix als Zielvektoren, d.h. das Ausgangstableau ist $(A|\mathbf{E}_{n\times n})$.

- ▷ Falls sich als Schlusstableau die Form $(\mathbf{E}_{n\times n}|B)$, ergibt, so ist A invertierbar und der rechts stehende Tabellenteil B ist die Inverse A^{-1} $(A|\mathbf{E}_{n\times n}) \to GJA \to (\mathbf{E}_{n\times n}|A^{-1})$
- ▷ Andernfalls ist A nicht invertierbar (und am Schlusstableau kann rechts abgelesen werden, welche(s) $\mathbf{e}_n^{j\cdot}$ als Zielvektor(en) dies verhindern, nämlich der-/diejenigen $\mathbf{e}_n^{j\cdot}$, für die es *keine* eindeutige Lösung $A \cdot x = \mathbf{e}_n^{j\cdot}$ gibt)

Sie müssen sich nicht genau an die folgende äußere (Protokoll-)Form halten, aber: BITTE wählen Sie eine Form, die jeden Schritt gut nachvollziehbar macht, die Methode soll geprüft werden und Ihre Lösung soll dies erkennen lassen können/korrigierbar sein ...

Im **Protokoll** bezeichnen **I, II,** ... die erste, zweite, ... Zeile die jeweils vorhergehenden (erweiterten) Koeffiziententabelle. Neben jeder Zeile steht die Umformung (zusammengesetzt aus elementaren Zeilenumformungen), die dieses Zeilenergebnis liefert. [*In den Beispielen sind Basiszeilen fett gesetzt*]

Bsp. 1 *(Forts.)* [E bezeichnet die Endprodukton, $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix]
Hier ist $m = 2$ (Gleichungen), $n = 3$ (Variablenanzahl)

	E_1	E_2	E_3 (=)	b	*Protokoll*	
$A_{2\times 3}$	5	10	5	150	*I*	*(Ausgangstabelle)*
	2	5	2	70	*II*	
	1	2	1	30	**I**/*5*	
	2	5	2	70	*II*	
	1	2	1	30	**I**	
	0	1	0	10	*II*–2·**I**	
$\mathbf{E}_{2\times 2}$	1	0	1	10	*I*–2·**II**	
	0	1	0	10	**II**	*(Schlusstabelle)*
	E_1	E_2	E_3 (=)	b^*		

$r = 2 = \text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$, es gibt $m - r = 0$ überflüssige Gleichungen, $n - r = 1$ Variablen sind frei wählbar (hier: E_3, die Variable die nicht zu den Spalten der erzeugten Einheitsmatrix $\mathbf{E}_{2\times 2}$ gehört).
Lösungsmenge (Übersetzung der Schlusstabelle in Gleichungsform)

$$L = \left\{ E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{ll} E_1 = 10 - E_3 & \\ E_2 = 10 & \\ E_3 \in \mathbb{R} & \text{frei wählbar} \end{array} \right\}$$

Bemerkung Bei ökonomischen Anwendungen wird eine solche allgemeine Lösungsmenge häufig durch zusätzliche inhaltliche Bedingungen eingeschränkt, in diesem Beispiel (Gesamtverarbeitung M_{RE}) könnten z.B. zusätzlich ein Mindestoutput $E = (3, 3, 3)^T$, der nicht unterschritten werden darf, vorgegeben und – bei nicht beliebig teilbaren Gütern – nur ganzzahlige Lösungen akzeptabel sein. Beide Forderungen werden dann die obige Lösungsmenge auf folgende, „ökonomische sinnvolle“ Lösungen einschränken (Aufzählung anhand der Festlegung von $E_3 = x_3$):

$$E = (E_1\ E_2\ E_3)^T \in L_{\text{faktisch}} = \{(7\ 10\ 3)^T, (6\ 10\ 4)^T, (5\ 10\ 5)^T, (4\ 10\ 6)^T, (3\ 10\ 7)^T\}$$

Bsp. 2 Gegeben ist das LGS („Rohform“ und übersichtlicher aufgeschrieben)

$$\begin{array}{ll} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 & \qquad 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 0 & \qquad 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0 \\ ax_2 + x_3 = 3 & \qquad 0 \cdot x_1 + a \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 3 \end{array}$$

Hierbei ist a eine fixe, aber unbekannte Zahl (z.B. ein nicht beeinflussbarer und noch nicht festgelegter exogener ökonomischer Parameter).

(Erweiterte) Koeffiziententabelle und Algorithmus

x_1	x_2	x_3 (=)	b	*Protokoll*	
1	-1	2	2	I	
1	0	1	0	II	*LGS als Tabelle*
0	a	1	3	III	
1	-1	2	2	$\mathbf{I}$	
0	1	-1	-2	$II - 1 \cdot \mathbf{I}$	
0	a	1	3	$III - 0 \cdot \mathbf{I}$	
1	0	1	0	$I + 1 \cdot \mathbf{II}$	
0	1	-1	-2	$\mathbf{II}$	
0	0	$1+a$	$3+2a$	$III - a \cdot \mathbf{II}$	

Fall 1: $1+a = 0$, d.h. $a = -1$.
Die letzte Zeile lautet dann: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot +0 \cdot x_3 = 3 - 2$, d.h. $0 = 1$.
Dies ist unerfüllbar, also ist das LGS *nicht lösbar*.

[oder: $\text{rang}(A_{3\times3}) = 2 < 3 = \text{rang}(A|b) \Rightarrow$ LGS *nicht lösbar*]

Fall 2: $1+a \neq 0$, d.h. $a \neq -1$: Division durch $1+a$ ist nun erlaubt.

x_1	x_2	x_3	b	Protokoll
1	0	1	0	I
0	1	-1	-2	II
0	0	1	$\frac{3+2a}{1+a}$	$\mathbf{III}/$ (1+a)
1	0	0	$-\frac{3+2a}{1+a}$	$I - 1 \cdot \mathbf{III}$
0	1	0	$-2 + \frac{3+2a}{1+a}$	$II + 1 \cdot \mathbf{III}$
0	0	1	$\frac{3+2a}{1+a}$	$\mathbf{III}$

Als eindeutige Lösung im Fall $a \neq 1$ (Tabelle wieder als LGS):

$$(*) \qquad x_1 = -\frac{3+2a}{1+a}, x_2 = -2 + \frac{3+2a}{1+a} = \frac{1}{1+a}, x_3 = \frac{3+2a}{1+a}$$

Zusammenfassung, abhängig vom Wert von a:

- ▷ falls $a = -1$, so ist das LGS nicht lösbar,
- ▷ falls $a \neq -1$, so hat das LGS genau eine Lösung, nämlich $(*)$.

Zusatzfrage: Gibt es eine Lösung $(x_1, x_2, x_3)^T$, bei der $x_2 = 1 - a$ ist?
Wenn $x_2 = 1 - a$ sein soll, so ist dies

(Fall 1) nicht lösbar, wenn $a = -1$.

(Fall 2) lösbar für $a \neq -1$, wenn zusätzlich $\frac{1}{1+a} \overset{(*)}{=} x_2 = 1 - a$ gilt.
Dies ist der Fall, denn $\frac{1}{1+a} = 1 - a$ hat die (einzige) Lösung $a = 0$. Die eindeutige Lösung x des LGS ist dann nach $(*)$ gegeben durch

$$x = (x_1\ x_2\ x_3)^T \quad \text{mit} \quad x_1 = -3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3.$$

Bsp. 3 *Inverse Matrix*

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Existiert die Inverse von A? Falls ja: $A^{-1} =$?

x_1	x_2	x_3 (=)	$\mathbf{e}_3^{1.}$	$\mathbf{e}_3^{2.}$	$\mathbf{e}_3^{3.}$	*Protokoll*
1	−1	2	1	0	0	*I*
1	0	1	0	1	0	*II*
0	0	1	0	0	1	*III*
1	−1	2	1	0	0	**I**
0	1	−1	−1	1	0	$II - 1\cdot$ **I**
0	0	1	0	0	1	*III*
1	0	1	0	1	0	$I + 1\cdot$ **II**
0	1	−1	−1	1	0	**II**
0	0	1	0	0	1	*III*
1	0	0	0	1	−1	$I - 1\cdot$ **III**
0	1	0	−1	1	1	$II + 1\cdot$ **III**
0	0	1	0	0	1	**III**

Links ist die Einheitsmatrix entstanden, also ist A invertierbar und A^{-1} ist die rechts stehende (3×3)-Matrix. *Probe:* $A^{-1} \cdot A = \mathbf{E}$ oder $A \cdot A^{-1} = \mathbf{E}$.
Mit dieser Information ist also (vgl. Thema 3.2) die eindeutige Lösung jeder Matrixgleichung $A \cdot x = b$ gegeben durch $x = A^{-1} \cdot b$. Insbesondere muss sich für $b = (2\ 0\ 3)^T$ die obige Lösung $x = (-3\ 1\ 3)^T$ ergeben (vgl. Bsp. 2):

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Diese Lösung hätten wir z.B. auch dadurch erhalten, dass wir den Zielvektor $b = (2\ 0\ 3)^T$ simultan zur Inversenberechnung mit umformen.

Bsp. 4 *Lineare (Un-)Abhängigkeit*
von Spaltenvektoren der folgenden Ausgangstabelle. Zu lösen ist $A \cdot x = \mathbf{0}$. (Der Zielvektor $\mathbf{0}$ wird manchmal nicht mit tabelliert, weil er unter elementaren Zeilenumformungen unverändert bleibt.)

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	*Protokoll*
	1	1	1	2	0	I
	-1	0	-1	-1	0	II
	1	1	-1	2	0	III
	3	2	1	5	0	IV
	4	0	2	4	0	V
	1	1	1	2	0	$\mathbf{I}$
	0	1	0	1	0	$II + \mathbf{I}$
	0	0	-2	0	0	$III - \mathbf{I}$
	0	-1	-2	-1	0	$IV - 3 \cdot \mathbf{I}$
	0	-4	-2	-4	0	$V - 4 \cdot \mathbf{I}$
	1	0	1	1	0	$I - \mathbf{II}$
	0	1	0	1	0	$\mathbf{II}$
	0	0	1	0	0	$III/(-2)$
	0	0	-2	0	0	$IV + \mathbf{II}$
	0	0	-2	0	0	$V + 4 \cdot \mathbf{II}$
	1	0	0	1	0	$I - \mathbf{III}$
$\mathbf{E}_{3\times 3}$	0	1	0	1	0	II
	0	0	1	0	0	$\mathbf{III}$
	0	0	0	0	0	$IV + 2 \cdot \mathbf{III}$
	0	0	0	0	0	$V + 2 \cdot \mathbf{III}$

Demnach ist rang(A) = 3 = maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (bzw. Zeilenvektoren) von A. Weder die Zeilen noch die Spalten von A sind insgesamt linear unabhängig.

Ergänzung:

Die Lösung x des Schlusstableaus gibt die Form der linearen Abhängigkeit zwischen den vier Spalten von A an. Der Nullvektor ergibt sich mit den Faktoren $x_1 = 0 - x_4, x_2 = 0 - x_4$, $x_3 = 0, x_4 \in \mathbb{R}$ (frei wählbar):

$$(-x_4)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + (-x_4)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z.B. für $x_4 = -1$ anders formuliert: 1. Spalte + 2. Spalte = 4. Spalte