Zahlenfolgen und deren Grenzwerte

Wichtige Begriffsbildungen, darunter die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, Exponentialfunktion und Logarithmus sowie Ableitung und Integral von Funktionen sind definiert (bzw. definierbar) mit Hilfe von Zahlenfolgen und deren *Grenzwerte*. Marginales Änderungsverhalten ökonomischer Zusammenhänge kann durch Grenzwerte von Zahlenfolgen analysiert werden. Systematische Rechenverfahren (Algorithmen) oder Schätzverfahren ($\triangleright$ Statistik) werden u.a. danach bewertet, ob und wie sie *konvergieren*.

Zahlenfolge

Eine eindeutige Aufzählung von Zahlen $\boldsymbol{a_i}$, fortlaufend nummeriert/indiziert mit $\boldsymbol{i \in \mathbb{N}}$ oder $\boldsymbol{(i \in \mathbb{N}_0)}$ *(kurz: Folge)*

Allgemeine Schreibweise: $\boldsymbol{a_i,\ i \in \mathbb{N}}$ oder $(\boldsymbol{a_i,\ i \in \mathbb{N}_0})$ **unendliche Folgen**

$\boldsymbol{a_i, i = 1, \dots, n,}$ **endliche Folgen**

Eindeutige Aufzählung:

- **Angabe eines Bildungsgesetzes von $\boldsymbol{a_i}$ für jeden Index $\boldsymbol{i}$**
- **direkte Aufzählung** *(nur bei endlichen Folgen)*

Bsp. $a_i := 2i - 1$, $i \in \mathbb{N}$, die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen

$c_k := 0$, $k \in \mathbb{N}$, die *konstante* Folge von Nullen

$d_n := f(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionswerten wobei $(a_n,\ n \in \mathbb{N})$, eine Zahlenfolge ist und f eine fest gewählte Funktion

Spezielles Bildungsgesetz

Geometrische Folge

konstante <u>relative</u> Änderung $\boldsymbol{= q - 1 \neq 0}$ *Keine rel. Änderung:* $q = 1$

Startwert $(\boldsymbol{a_0}$ bzw. $\boldsymbol{a_1})$, Bildungsgesetz: $\boldsymbol{a_{i+1} = a_i \cdot q}$ $(q \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ fix$)$

äquivalent: $\boldsymbol{a_i = a_1 \cdot q^{i-1}}$ $\boldsymbol{i \in \mathbb{N}}$

bzw.: $\boldsymbol{a_i = a_0 \cdot q^{i-1}}$ $\boldsymbol{i \in \mathbb{N}_0}$

Der Beginn der Nummerierung wird meist von der Fragestellung abgeleitet, z.B. davon, ob <u>Zeitperioden</u> $1, \dots, n$ im Vordergrund stehen oder die hierzu gehörigen <u>Zeitpunkte</u> $0, 1, \dots, n$.

Bsp. (Anlagerendite)

Die Anlage eines Guthabens von 980 Euro werde jährlich mit 2% verzinst. Dann beträgt der Zinsertrag im n-ten Jahr $a_n := 980 \cdot 0.02^n$ Euro. Daraus ergibt sich die Folge möglicher Zinserträge

$$980 \cdot 0.02^n, n \in \mathbb{N}.$$

Sie ist ein Beispiel für eine geometrische Folge. Eine mögliche Frage ist, wie Zinserträge (approximativ) in ferner Zukunft aussehen werden? Dies führt zum Begriff *Konvergenz von Zahlenfolgen* (s.u.).

36 Nullfolge / Konvergenz $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *Schranken $C > 0$*

Wenn es zu jeder vorgegebenen Schranke c (maximale Abweichung) eine Nummer n_c gibt, ab der jedes Folgeglied $|a_n| \leq C$ erfüllt, so heißt $(a_n, n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge und die Zahl 0 Grenzwert/Limes dieser Folge.

Der kritische Index $\boldsymbol{n_C}$ darf abhängig von der Schranke C gewählt werden.

Schreibweise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ oder $(a_n \to 0$ für $n \to \infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- für $a_n := |p|^n, n \in \mathbb{N}$, **wenn** $p \in \mathbb{R}$ **fix**, $|p| < 1$
- für $a_n := (1/n)^r, n \in \mathbb{N}$, **wenn** $r \in \mathbb{Q}$ **fix**, $r > 0$

37 Konvergente Folge / Konvergenz $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathbb{R}$

Wenn es zu einer Folge $(a_n, n \in \mathbb{N})$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, mit der die betraglichen Abweichungen $|a_n - a|, n \in \mathbb{N}$, eine Nullfolge bilden, so heißt die Folge konvergent und die Zahl a Grenzwert/Limes dieser Folge.

Schreibweise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ oder $(a_n \to a$ für $n \to \infty)$

$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \;:\Leftrightarrow\; |a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ **mit** $a \in \mathbb{R}$

- *Jede Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$, hat entweder keinen oder einen (eindeutigen) Grenzwert.*
- Die Eulersche Zahl e, $\lim\limits_{n\to\infty}(1/(0!) + \cdots + 1/(n!)) = e = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^n \approx 2.71828$, ist Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen, aber selbst nicht rational.

- Gilt $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, so macht die Sprechweise $\boldsymbol{a \approx a_n}$ **für genügend große $\boldsymbol{n}$**

  Sinn und es können – nach Vorgabe einer benötigten Genauigkeit C – Folgeglieder a_n mit $n \geq n_C$ für Hilfsüberlegungen verwendet werden. Je nach Folge jedoch drastische Unterschiede im benötigten n_C (Rechenaufwand!!):

  Bsp. $\left|e - \left(\frac{1}{0!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right| \leq 10^{-3}$ für $n \geq 6$, $e \approx \left(\frac{1}{0!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ für $n \geq 6$

  $|e - (\frac{n+1}{n})^n| \leq 10^{-3}$ für $n \geq 1359$, aber $|e - (\frac{n+1}{n})^n| > 10^{-3}$ für $n < 1359$

Exponentialfunktion $\boldsymbol{e^x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^0}{0!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+x}{n}\right)^n}$ **für $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$**

38 (Uneigentlicher) Grenzwert $\boldsymbol{a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty}$ bzw. $\boldsymbol{a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty}$

$\boldsymbol{a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty :\Leftrightarrow a_n > 0}$ **ab einer Nummer $\boldsymbol{n_0}$ und $\boldsymbol{(1/a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$**

$\boldsymbol{a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty :\Leftrightarrow a_n < 0}$ **ab einer Nummer $\boldsymbol{n_0}$ und $\boldsymbol{(1/a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$**

$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty}$
- **für $\boldsymbol{a_n := |q|^n, n \in \mathbb{N}}$, wenn $\boldsymbol{q \in \mathbb{R}}$ fix, $\boldsymbol{|q| > 1}$**
- **für $\boldsymbol{a_n := (n+d)^r, n \in \mathbb{N}}$, wenn $\boldsymbol{d \geq 0}$, $\boldsymbol{r \in \mathbb{Q}}$ fix, $\boldsymbol{r > 0}$**

Oft werden Zahlenfolgen, deren Grenzwerte bekannt sind, miteinander verkettet. Die Frage stellt sich dann, ob aus der Konvergenz der beteiligten einzelnen Zahlenfolgen auf die Konvergenz der zusammengesetzten Zahlenfolgen geschlossen werden kann.

Bsp. 1

(a) $a_n := \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$. Bekannt: $\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$. $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ?$

(b) $a_n := -\left(\frac{1}{n}\right)^r, n \in \mathbb{N}$, für $r \in \mathbb{Q} \cap]0,\infty[$. Bekannt: $-1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$, $\left(\frac{1}{n}\right)^r \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ?$

(c) $a_n := c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + d, n \in \mathbb{N}$, für $c, d \in \mathbb{R}$. Bekannt $c \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $d \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d$. $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ?$

(d) $a_n := c \cdot 2^n, n \in \mathbb{N}$, für $c \in \mathbb{R}$. Bekannt: $c \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$, $2^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ?$

(e) $a_n := \frac{d}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - e}, n \in \mathbb{N}$, für $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bekannt: $d \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d$, $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$, $e \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$. $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ?$

Bei einigen Typen von Zusammensetzungen ist bekannt, wie von der Konvergenz einzelner Zahlenfolgen auf die Konvergenz von zusammengesetzten Zahlenfolgen geschlossen werden kann. Eine Übersicht bieten die folgenden Rechenregeln.

39 Rechenregeln für Folgen

Für konvergente Folgen $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a,\ b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b,\ c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$ gilt:

- **wenn die Grenzwerte $a, b, c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$ sind:**

  $$a_n \pm b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \pm b, \quad a_n \cdot b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \cdot b, \quad \frac{a_n}{c_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{c}$$

- **wenn $c = 0$ oder uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$ beteiligt sind:**

  !!! Die Rechenausdrücke $\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{\cdots}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$ sind nicht definiert

  ansonsten kann der sich ergebende Grenzwert aus den folgenden Rechenregeln erschlossen werden:

$$\begin{array}{rclll rcll}
-(-\infty) & := & \infty & & & & & & \\
\infty + \infty & := & \infty & & & d + \infty & := & \infty & \text{für} \quad d \in \mathbb{R} \\
\infty \cdot \infty & := & \infty & \text{für } d \in \mathbb{R} & & d \cdot \infty & := & \infty & \text{für} \quad d > 0 \\
d/\infty & := & 0 & \text{für } d \in \mathbb{R} & & \infty/d & := & \infty & \text{für} \quad d > 0
\end{array}$$

Bsp. 2 (Bei Quotienten mit Potenzen von n passendes) Hilfsmittel zum Umformen von a_n/b_n, wenn $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$: *Division durch die höchste Nennerpotenz*

a) $\dfrac{n-1}{2n^2+1} = \dfrac{n^{-1}-n^{-2}}{2+n^{-2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0-0}{2+0} = 0$

b) $\dfrac{2n^{3/2}-4n+5}{3n^{3/2}+2n^{1/2}-3} = \dfrac{2-4n^{-1/2}+5n^{-3/2}}{3+2n^{-1}-3n^{-3/2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2-0+0}{3+0-0} = \frac{2}{3}$

c) $\dfrac{3n^{5/3}-n^{1/2}+1}{n^{3/2}+2n-3} = \dfrac{3n^{1/6}-n^{-1}+n^{-3/2}}{1+2n^{-1/2}-3n^{-3/2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3\cdot\infty-0+0}{1+0-0} = \infty$

Bsp. 3 Für $\alpha, \beta > 0$ fix: $n^\alpha \cdot n^{-\beta} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \cdot 0$? Nicht definiert, aber

$$n^\alpha \cdot n^{-\beta} = n^{\alpha-\beta} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad \alpha < \beta \\ 1 & \text{falls} \quad \alpha = \beta \\ \infty & \text{falls} \quad \alpha > \beta \end{cases}$$

Bsp. 4 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty - \infty$? Nicht definiert aber

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\infty+\infty} = 0$$

Marginales Änderungsverhalten ökonomischer Zusammenhänge

Durch Funktionen $f : D(f) \to \mathbb{R},\ D(f) \subset \mathbb{R}$ einer Variablen können oftmals Zusammenhänge zwischen zwei ökonomischen Größen beschrieben und analysiert werden. Die ökonomische Größe, deren Werte in die Funktion eingesetzt werden, heißt *unabhängige* Größe. Die ökonomische Größe, deren Werte sich aus den Funktionswerten ergeben, wird *abhängige* Größe genannt. Eine grundlegende Fragestellung für ökonomische Entscheidung wie z.B. Investitionen oder wirtschaftspolitische Steuerung besteht darin, welche Effekte marginale Änderungen bei den Werten der unabhängigen Größe für die Werte der abhängigen Größe besitzen. Marginale Änderungen in den Werten der abhängigen Größe wird mathematisch dargestellt durch Grenzwerte von Zahlenfolgen. Werden die Zahlenfolgen in die Funktion eingesetzt, entstehen neue Zahlenfolgen, die Funktionswertfolgen. Das (mögliche) Konvergenzverhalten der Funktionswertfolgen beschreibt dann einen ersten Effekt für die marginalen Änderungen in den Werten der unabhängigen ökonomischen Größe.

(Uneigentliche) Grenzwerte von Zahlenfolgen ▷ Nrn. 36-39

40 Grenzwert einer Funktion f in x_0 $x_0 \in [a, b] \subset D(f)$

Die Zahl x_0 ist also als Grenzwert erreichbar durch Zahlenfolgen $x_n, n \in \mathbb{N}$, für die (für alle $n \in \mathbb{N}$) $x_n \in D(f)$ und $x_n \neq x_0$ gilt.

Eine Zahl c heißt Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0, wenn für JEDE Folge $(x_n, n \in \mathbb{N})$ mit $x_n \in D(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x_0$ gilt: $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} c$.

Schreibweisen GW $\quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ oder $f(x) \to c$ für $x \to x_0$

Für einen **linksseitigen Grenzwert** werden nur **Folgen mit $x_n < x_0$**,
für einen **rechtsseitigen Grenzwert** werden nur **Folgen mit $x_n > x_0$**,
zugelassen.

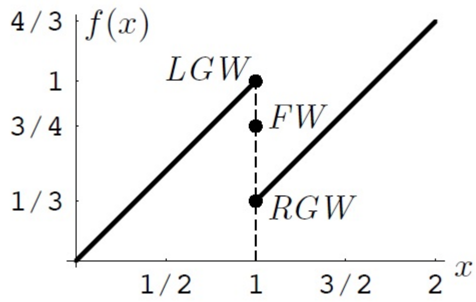
Schreibweisen LGW $\quad \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = c$ oder $f(x) \to c$ **für $x \to x_0-$**

Schreibweise RGW $\quad \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = c$ oder $f(x) \to c$ **für $x \to x_0+$**

Existieren links- und rechtsseitiger Grenzwert, und sind beide gleich der einen Zahl c, so ist auch der Grenzwert gleich c (und umgekehrt).

GW = LGW = RGW Rechenregeln für Grenzwerte ▷ wie Nr. 39

Bsp. 5



$$x_0 = 1, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & \text{für } x = 1 \\ x - 2/3 & \text{für } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

LGW: $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-} x = 1$
FW: $f(1) = 3/4$
RGW: $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+} (x - 2/3) = 1/3$

41 Grenzwerte von Grundfunktionen

Bei den **Grundfunktionen** $|\boldsymbol{x}|$, $\boldsymbol{x^r}$ $(\boldsymbol{r} \in \mathbb{Q})$, $\boldsymbol{e^x}$ und $\ln \boldsymbol{x}$ gilt:

Grenzwert der Funktion in x_0 = Funktionswert in x_0

$$\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$$

$$\lim_{x \to x_0} x^r = x_0^r$$

$$\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$$

Als Sonderfälle für die Stelle $\boldsymbol{x_0}$ und den (dann „uneigentlich“ genannten) Grenzwert $\boldsymbol{c}$ einer Funktion sind auch die „idealen Zahlen“ $\pm\infty$ zugelassen, d.h. der uneigentliche Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x)} = \pm\infty$ (sog. Polstellen) und die Grenzwertbildung $\lim\limits_{x \to \infty} \boldsymbol{f(x)}$ [bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} \boldsymbol{f(x)}$] für alle uneigentlichen Grenzwerte von Folgen $x_n \to \infty$ [bzw. $x_n \to -\infty$]

Bsp. 6

(a) $\lim_{x \to -\infty} |x| = \lim_{x \to \infty} |x| = \infty$

(b) $\lim_{x \to \infty} x^r = \infty$ für $r \in \mathbb{Q}$ positiv

(c) $\lim_{x \to 0} x^r = \infty$, $\lim_{x \to \infty} x^r = 0$ für $r \in \mathbb{Q}$ negativ

(d) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

(e) $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$

Die Rechenregeln für Folgen können für die Grenzwerte von Funktionen übertragen werden.

42 Regeln für Grenzwerte von Funktionen $\alpha \in \mathbb{R}$ konstant

Sind $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$ Funktionen, für die der Grenzwert in $\boldsymbol{x_0}$ existiert, dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} (f/g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) / \lim_{x\to x_0} g(x), \text{ wenn } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$$

Existieren $\boldsymbol{y_0 := \lim_{x\to x_0} g(x)}$ und $\boldsymbol{\lim_{y\to y_0} f(y)}$ dann

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y).$$

Funktionen, bei denen die Grenzwerte gerade mit den Funktionswerten übereinstimmen, bilden eine eigenen Klasse.

43 Stetigkeit einer Funktion $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x_0}$ $x_0 \in [a,b] \subset D(f)$

Stetigkeit von f in x_0: LGW=FW=RGW

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ existiert und } f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Ist f an **jeder** Stelle $x_0 \in D(f)$ stetig, so heißt f **stetig**.

Anschaulich bedeutet Stetigkeit, dass der Graph einer Funktion an der betrachteten Stelle nicht springt.

Bsp. 7 Die Funktion f aus Bsp. 5 ist **nicht stetig** in $x_0 = 1$, aber **stetig** in jeder anderen Stelle $\boldsymbol{x_0 \in [0,2] \setminus \{1\}}$.

Die Grenzwerteigenschaft stetiger Funktionen berechtigt dazu, den Funktionswert eines (im Modell) stetigen f an einer *rechnerisch ungüstingen oder praktisch nicht realisierbaren* Stelle x durch den Funktionswert an einer *rechnerisch günstigeren oder praktisch realisierbaren Stelle* x_0 abzuschätzen:

Nährung für $f(x)$ bei stetigen Funktionen: $x \approx x_0 \Rightarrow f(x) \approx f(x_0)$

Marginalanalyse ökonomischer Zusammenhänge

Wird ein ökonomischer Zusammenhang durch eine stetige Funktion beschrieben, so bedeutet **interpretatorisch** eine „kleine“ absolute Änderung der unabhängigen ökonomischen Größe eine „kleine“ absolute Änderung der abhängigen ökonomischen Größe.

Aus den Regeln für Grenzwerte von Funktionen (Nr. 42) ergeben sich folgende Regeln für stetige Funktionen.

44 Regeln für stetige Funktionen $\alpha \in \mathbb{R}$ konstant

Sind f und g stetig in x_0, dann auch

$$\alpha f,\ f \pm g,\ f \cdot g \text{ und, wenn } g(x_0) \neq 0,\ f/g.$$

Ist **g stetig in x_0** und **f stetig in $y_0 = g(x_0)$**, dann ist **$f(g(x))$ stetig in x_0.**

45 Stetigkeit von Grundfunktionen

Die **Grundfunktionen** $|x|$, x^r ($r \in \mathbb{Q}$), e^x und $\ln x$ sind **stetig.**

Damit sind auch **Funktionen stetig, die nach obigen Regeln** (Nr. 44) **aus stetigen Grundfunktionen zusammengesetzt sind.**

Stückweise Stetigkeit *endlich viele Stücke*

Eine Funktion, die „stückweise“ (mit angrenzenden Stücken) definiert ist und die in jeder Stelle ihres Definitionsbereiches − mit Ausnahme mindestens einer Stückgrenze (Nahtstelle) − stetig ist, nennen wir **stückweise stetig.**