Differentiation einer Funktion mit einer Veränderlichen

Wir konzentrieren uns auf Funktionen $f : D(f) \to \mathbb{R},\ D(f) \subset \mathbb{R}$

Als eine wichtige Eigenschaft einer Funktion mit einer Variablen haben wir die Stetigkeit in den Einsetzstellen kennen gelernt (▷ *Nr. 43*). Die Stetigkeit einer Funktion $f(x)$ in x_0 erlaubt die Abschätzung $f(x) \approx x_0$, falls $x \approx x_0$. Solche Nährungen können sehr grob sein und sie erfassen nicht die Abhängigkeit der Änderungen von $f(x)$ von den Änderungen von x.

Ausgangspunkt einer „Marginalanalyse“

Was mensch genauer haben möchte, ist etwas von der Form

$$f(x) - f(x_0) \approx c \cdot (x - x_0)$$

also eine Aussage über eine (ungefähre) proportionale Abhängigkeit der Abweichung $f(x) - f(x_0)$ von den „kleinen “ Abweichungen $x - x_0$. Hierbei soll der *Proportionalitätsfaktor* c allenfalls von der „Basisstelle“ x_0 abhängen.

Anders formuliert:

Der Differenzenquotient $\boldsymbol{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ soll für jedes x_0 durch eine einzige Konstante ersetzt werden, die für alle x in der „Nähe“ von x_0 „ungefähr“ gültig ist. Bei differenzierbaren Funktionen wird dies mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten $c := f'(x_0)$ möglich:

46 Differenzierbarkeit einer Funktion f in x_0 $\qquad x_0 \in\ [a, b]\ \subset D(f)$

liegt vor, wenn der Grenzwert

$$\boldsymbol{f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}\textbf{, die Ableitung von } \boldsymbol{f} \textbf{ in } \boldsymbol{x_0} \textbf{ existiert.}$$

Mit $D(f') := \{x \in \mathbb{R} : f \text{ differenzierbar in } x\}$ wird eine neue Funktion definiert

$$f' : D(f') \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x).$$

Diese wird die **Ableitungsfunktion von f** genannt wird.

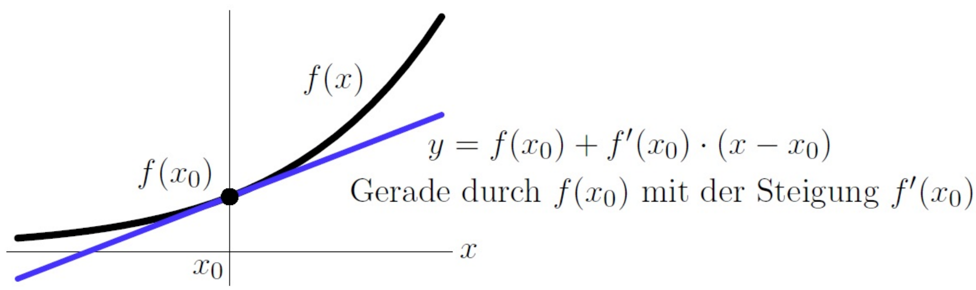
Ist f an **jeder** Stelle $x_0\ \in D(f)$ differenzierbar, so heißt **f differenzierbar**.

46a Die Grenzwertbildung für die Ableitung berechtigt zu dem marginalen (grenzwertigen) Ansatz:

Nährung für $\boldsymbol{f(x)}$ bei differenzierbaren Funktionen an der Basisstelle $\boldsymbol{x_0}$
$\boldsymbol{f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$ bzw. $\boldsymbol{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ ist die **Tangentengleichung** an f in $(x_0, f(x_0))$

Bsp.1



Eine in $\boldsymbol{x_0}$ differenzierbare Funktion ist auch in $\boldsymbol{x_0}$ stetig.

VORSICHT
Die Stetigkeit der <u>Funktion</u> $f(x)$, <u>nicht</u> der Ableitung $f'(x)$ folgt – die Ableitung wird zwar meist, muss aber nicht stetig sein.

47 Differenzierbarkeit von Grundfunktionen

Die **Grundfunktionen** $\boldsymbol{|x|, x^r (r \in \mathbb{Q}), e^x}$ und $\boldsymbol{\ln x}$ sind in den nachfolgend (als $D(f')$) angegeben Bereichen **differenzierbar.** Damit sind auch **Funktionen differenzierbar, die nach folgenden Regeln** (Nr.48) **aus differenzierbaren Grundfunktionen zusammengesetzt sind.**

▷ *Bei der Zusammensetzung Differenzierbarkeitsbereiche beachten*

47a	$f(x)$	$D(f)$	$D(f')$	$f'(x)$
1	c (konstant)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
2	$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_{\neq 0}$	$\begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$
3a	$x^k \quad (k \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$k \cdot x^{k-1}$
3b	$x^{-k} \quad (k \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}_{\neq 0}$	$\mathbb{R}_{\neq 0}$	$-k \cdot x^{-k-1}$
4a	$x^{1/k} \quad (k \in \mathbb{N}$ gerade$)$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\frac{1}{k} x^{1/k-1}$
4b	$x^{1/k} \quad (k \in \mathbb{N}$ ungerade$)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_{\neq 0}$	
4c	$x^r \quad (r \in \mathbb{Q})$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}_{>0}$	$r \cdot x^{r-1}$
5	$\ln x$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}_{>0}$	x^{-1}
6a	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
6b	$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (\alpha \in \mathbb{R}_{\neq 0})$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
6c	$b^x = e^{x \ln b} \quad (b \in \mathbb{R}_{>0}, b \neq 1)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(\ln b) \cdot b^x$

Fast alle in der ökonomischen Anwendungen betrachteten Funktionen setzen sich – unter Verwendung der bei den folgenden Rechenregeln betrachteten Operationen *Vielfache* $[\alpha f(x)]$, *endliche Summen* $[f(x) \pm g(x)]$, *Produkte* $[f(x) \cdot g(x), f(x)/g(x)]$ und *Kompositionen* $[f(g(x))]$ – aus den obigen Funktionstypen zusammen.

(6b-c) sind bereits abstrakte Beispiele für die Anwendung der unten folgenden Kettenregel (KR).

48 Regeln für differenzierbare Funktionen $\alpha \in \mathbb{R}$ konstant

Sind $\boldsymbol{f}$ und $\boldsymbol{g}$ differenzierbar in $\boldsymbol{x_0}$, dann auch

$$\boldsymbol{\alpha f,\ f \pm g,\ f \cdot g} \text{ und wenn, } g(x_0) \neq 0,\ \boldsymbol{f/g}.$$

Ist $\boldsymbol{g}$ **differenzierbar in** $\boldsymbol{x_0}$ und $\boldsymbol{f}$ **differenzierbar in** $\boldsymbol{y_0 = g(x_0)}$, dann ist $\boldsymbol{f(g(x))}$ **differenzierbar in** $\boldsymbol{x_0}$**.**
Die Ableitungen ergeben sich (auch) aus den Ableitungen der an der neu zusammengesettzen Funktion beteiligten Funktionen, jeweils an der Stelle x_0:

	$\boldsymbol{(\alpha f)'}$	$=$	$\boldsymbol{\alpha f'}$	konstante Faktoren ausklammern
	$\boldsymbol{(f \pm g)'}$	$=$	$\boldsymbol{f' \pm g'}$	Summen gliedweise differenzieren
(PR)	$\boldsymbol{(f \cdot g)'}$	$=$	$\boldsymbol{f' \cdot g + f \cdot g'}$	Produktregel
(QR)	$\boldsymbol{(f/g)'}$	$=$	$\boldsymbol{(f' \cdot g - f \cdot g')/g^2}$	Quotientenregel
(KR)	$\boldsymbol{(f(g))'}$	$=$	$\boldsymbol{f'(g) \cdot g'}$	Kettenregel

Bsp. 2 (Kettenregel)

(a) $f(x) = (1+x^2)^3,\ f'(x) = 3\,(1+x^2)^{3-1}\,(2x) = 6x(1+x^2)^2$

(b) $f(x) = (1+x^2)^{-3/2},\ f'(x) = \frac{-3}{2}\,(1+x^2)^{-3/2-1}\,(2x) = -3x(1+x^2)^{-5/2}$

(c) $f(x) = (1+x^2)^{\sqrt{2}},\ f'(x) = \sqrt{2}\,(1+x^2)^{\sqrt{2}-1}\,(2x) = 2^{3/2}x(1+x^2)^{\sqrt{2}-1}$

(d) $f(x) = \ln\,(1+x^2),\quad f'(x) = \dfrac{(2x)}{(1+x^2)}$ $\boxed{z \quad z'}$

(e) $f(x) = e^{(1+x^2)},\ f'(x) = e^{(1+x^2)} \cdot (2x)$

(f) $f(x) = \ln\,(1+e^{1+x^2}),\ f'(x) = \dfrac{(1+e^{1+x^2})'}{1+e^{1+x^2}} \underset{\text{Bsp. 2 (e)}}{=} \dfrac{e^{1+x^2} \cdot (2x)}{1+e^{1+x^2}}$

Anwendung 1: Dimensionslose Marginalanalyse

Die Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion f in einer Stelle x_0 gibt einen approximativen Proportionalitätsfaktor an für die absoluten Änderungen der Funktionswerte (der abhängigen ökonomischen Größe) im Verhältnis zu den absoluten Änderungen der Werte von x (der unabhängigen ökonomischen Größe) in der Basisstelle x_0. Für ökonomische Zusammenhänge ist es oftmals interessant, das proportionale Änderungsverhalten der abhängigen ökonomischen Größe gegenüber der unabhängigen Größe so zu beschreiben, dass verwendete Maßeinheiten für die Werte der ökonomischen Größen keine Rolle spielen.

Dimensionslose „Marginalanalyse“

Gesucht ist etwas von der Form

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)} \approx c \cdot \frac{x-x_0}{x_0}$$

also eine Aussage über eine (ungefähre) proportionale Abhängigkeit der relativen Abweichung $\big(f(x)-f(x_0)\big)/f(x_0)$ von den „kleinen“ relativen Abweichungen $(x-x_0)/x_0$. Hierbei soll der *Proportionalitätsfaktor* c allenfalls von der „Basisstelle“ x_0 abhängen.

49 **Elastizität von f**

- $\boldsymbol{\mathcal{E}^f_{\text{diskret}}(x_{\text{neu}}) := \dfrac{\frac{f(x_{\text{neu}})-f(x_{\text{alt}})}{f(x_{\text{alt}})}}{\frac{x_{\text{neu}}-x_{\text{alt}}}{x_{\text{alt}}}}}$ heißt **diskrete Elastizität von** f.
- $\boldsymbol{\mathcal{E}^f(x) := \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x}$ heißt **Elastizität von f an der Stelle x**

$\mathcal{E}^f(x_{\text{alt}})$ ist also gleich dem Grenzwert $\lim\limits_{x_{\text{neu}} \to x_{\text{alt}}} \mathcal{E}^f_{\text{diskret}}(x_{\text{neu}})$.

49a Mit Nr. 49 kann man für x “in der Nähe” von x_0 schreiben

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x_0)} \approx \mathcal{E}^f(x_0) \cdot \frac{x-x_0}{x_0} \quad \text{proportional}$$

Die Elastizität von f gibt an einer Basisstelle x_0 annähernd den Faktor an, mit dem sich eine relative Änderung von x bzgl. x_0 in eine relative Änderung von $f(x)$ bzgl. $f(x_0)$ übersetzt. Je nach Ausmaß dieses Faktors heißt

- **f elastisch in x_0**, wenn $|\mathcal{E}^f(x_0)| > 1$ *überproportional*
- **f 1-elastisch in x_0**, wenn $|\mathcal{E}^f(x_0)| = 1$ *1:1-proportional*
- **f unelastisch in x_0**, wenn $|\mathcal{E}^f(x_0)| < 1$ *unterproportional*

Wir erwähnen hier noch eine gebräuchliche (alternative) Notation für das proportionale Änderungsverhalten, das durch Elastizität gemessen wird.

$$\frac{df}{f(x_0)} \approx \mathcal{E}^f(x_0) \cdot \frac{dx}{x_0} \quad \text{proportional}$$

Hierbei soll $dx \approx x - x_0$ für *kleine Abweichung* von x gegenüber x_0 stehen und $df \approx f(x) - f(x_0)$ kann dann entsprechend für Abweichung von $f(x)$ gegenüber $f(x_0)$ verstanden werden.

Bsp. 3 **Beispiel zu Elastizität** *„Ökonomisches“ teils vereinfacht*

Für $x > 0$ sei $p(x) = 100(x+10)^{-1}$ eine Funktion, die den *Zusammenhang zwischen Preis p und Nachfrage x* beschreiben soll, hier den Preis in Abhängigkeit von der Nachfrage x. Wie sieht die ungefähre relative Preisänderung aus, wenn die Nachfragemenge vom Basiswert $x_{alt} = 40$ Einheiten um 10% reduziert wird?

Berechnung der Elastizität

$$p'(x) = -100(x+10)^{-2} < 0, \text{ d.h. } p'(40) = -\tfrac{4}{100}$$

$$\mathcal{E}^p(40) = \tfrac{p'(40)}{p(40)} \cdot 40 = \tfrac{-4/100}{2} \cdot 40 = -\tfrac{8}{10}$$

Relative Änderung

$$\tfrac{dp}{p(40)} = \tfrac{p(36)-p(40)}{p(40)} \approx \mathcal{E}^p(40) \cdot \tfrac{dx}{40} = (-\tfrac{8}{10}) \cdot (-10\%) = +8\%$$

Wegen $|\mathcal{E}^p(40)| = 0.8 < 1$ ist p „unelastisch“ bzgl. x an der Stelle $x_{alt} = 40$.

Anwendung 2: Monotonieverhalten

50 Monotonie einer differenzierbaren Funktion [Monotonie ▷ Nr.8]

$\boldsymbol{f'(x) > 0}$ für alle $x \in [a,b] \Rightarrow \boldsymbol{f}$ ist **streng monoton wachsend** über $[a,b]$

$\boldsymbol{f'(x) < 0}$ für alle $x \in [a,b] \Rightarrow \boldsymbol{f}$ ist **streng monoton fallend** über $[a,b]$

$\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$ für alle $x \in [a,b] \Rightarrow \boldsymbol{f}$ ist **monoton wachsend** über $[a,b]$

$\boldsymbol{f'(x) \leq 0}$ für alle $x \in [a,b] \Rightarrow \boldsymbol{f}$ ist **monoton fallend** über $[a,b]$

Anwendung 3: Optimierung einer Funktion

51 Extrempunkte einer Funktion $\boldsymbol{f}$ *Extremum = Min. oder Max.*

- $\boldsymbol{(x_0, f(x_0))}$ heißt **lokales Maximum von $\boldsymbol{f}$**, wenn um x_0 herum ein Intervall I gebildet werden kann so, dass $\boldsymbol{f(x_0) \geq f(x)}$ für alle $x \in D(f)$ mit $x \in I$.

- $\boldsymbol{(x_0, f(x_0))}$ heißt **lokales Minimum von $\boldsymbol{f}$**, wenn um x_0 herum ein Intervall I gebildet werden kann so, dass $\boldsymbol{f(x_0) \leq f(x)}$ für alle $x \in D(f)$ mit $x \in I$.

- Ein lokales Maximum (bzw. Minimum) heißt **global**, wenn der entsprechende Wertevergleich von $f(x_0) \geq f(x)$ (bzw. $f(x_0) \leq f(x)$) für jedes x aus dem Definitionsbereich von f richtig ist.

- $\boldsymbol{x_0}$ heißt **Extremstelle, $\boldsymbol{f(x_0)}$ Extremwert, $\boldsymbol{(x_0, f(x_0))}$ Extrempunkt**.

Standardmethoden zur Berechnung von Extrempunkten reduzieren die Suche nach möglichen Extremstellen auf die Bestimmung von Stellen, deren Ableitungen den Wert Null annehmen.

Stationäre Stellen einer Funktion f

Eine Stelle x_0 mit $f'(x_0) = 0$ heißt **stationäre Stelle von f**

Jede *stationäre Stelle* x_0 *ist eine mögliche Extremstelle* von f, die Tangente in $f(x_0)$ ist parallel zur x-Achse ($y = f(x_0)$, Steigung $f'(x_0) = 0$)

Stationäre Stellen einer Funktion f sind potentielle Extremstellen. Entscheidend ist, in einem nächsten Schritt das Monotonieverhalten von f in der „Nähe" einer stationären Stelle x_0 zu untersuchen

„nahe" links von x_0		„nahe" rechts von x_0		Art der Extremstelle
monoton wachsend	$+$	monoton fallend	$\Rightarrow$	x_0 lokale Maximalstelle
monoton fallend	$+$	monoton wachsend	$\Rightarrow$	x_0 lokale Minimalstelle

Gemäß *Nr. 50* läßt sich das Monotonieverhalten von Funktionen durch Vorzeichen von Ableitungen beschreiben. Damit liest sich dann die Bestimmung von Extrempunkten folgendermaßen:

„links" von x_0		„ rechts" von x_0		Art der Extremstelle
Ableitung ≥ 0	$+$	Ableitung ≤ 0	$\Rightarrow$	x_0 lokale Maximalstelle
Ableitung ≤ 0	$+$	Ableitung ≥ 0	$\Rightarrow$	x_0 lokale Minimalstelle

Nach Ermittelung von stationären Stellen geht es also in einem zweiten Schritt darum, die Vorzeichenbereiche der Ableitungsfunktion in der „Nähe" der stationären Stellen zu bestimmen. Dafür können die Ableitungen der Ableitungsfunktion sehr hilfreich sein.

Schreibweise $f^{(n)}(x), n \in \mathbb{N}_0$ für die n-te Ableitung von f

Die n-te Ableitung ($n \geq 1$) einer Funktion f ist suksessive definiert als Ableitung der $(n-1)$-ten Ableitung von f *(wenn es die Ableitung gibt)*

Anfang: $f^{(0)}(x) := f(x)$,

Schritt 1: $f^{(1)}(x) := (f^{(0)})'(x) = f'(x)$,

Schritt 2: $f^{(2)}(x) := (f^{(1)})'(x) = f''(x)$,

Schritt n: $f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x)$.

1.-3. Ableitung werden meist mit f', f'', f''' bezeichnet, dann $f^{(4)}, f^{(5)} \ldots$

Kriterien und Methode für über $[a, b]$ mehrfach differenzierbare Funktionen f

52 Extrempunktbestimmung $\boldsymbol{D(f) = [a, b]}$

1 Berechne $\boldsymbol{f'}$ und $\boldsymbol{f''}$ über $\boldsymbol{[a, b]}$

2 Bestimme die **strikten Vorzeichenbereiche $\pm$ von $\boldsymbol{f'}$** in $[a, b]$
Bereich $(+)$: strikte Zunahme von f, Bereich $(-)$: strikte Abnahme von f,
ggf. Nullstellen x_0 von f' (stationäre Stellen von f) berechnen.

3 Extrempunktbestimmung

3-1 **Lokale Extrema** (falls es Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$ gibt):
wenn $\boldsymbol{f''(x_0) < 0}$, dann ist $(x_0, f(x_0))$ **lokaler Maximalpunkt**,
wenn $\boldsymbol{f''(x_0) > 0}$, dann ist $(x_0, f(x_0))$ **lokaler Minimalpunkt**,
wenn $\boldsymbol{f''(x_0) = 0}$, dann ist (zunächst) keine Entscheidung möglich.

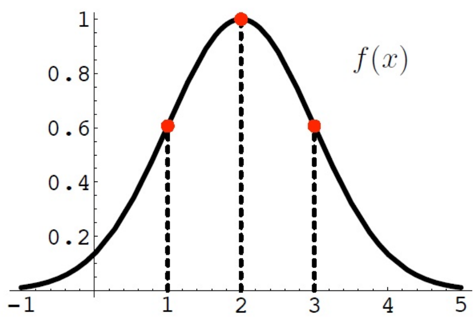
3-2 **Globale Extrema**:

(a) Vergleiche $f(a)$ und $f(b)$ und – falls es solche überhaupt gibt – lokale Extremwerte $f(x_0)$.

(b) Im Falle $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$ gibt es **keine lokalen** Extrema, **nur** a **und** b **globale Extrema**.

Bsp. 4 $f(x) = (1 + x)\ln(1 + x)$, $D(f) = [0, 1000]$. Für alle $x \in [0, 1000]$ ist,
$f'(x) = \ln(1 + x) + 1 \geq \ln(1) + 1 = 1 > 0$, $f''(x) = (1 + x)^{-1} > 0$.
Also ist f strikt monoton wachsend, ohne Maximum,
ohne lokale Extrema, globales Minimum ist $f(0) = \ln 1 = 0$.

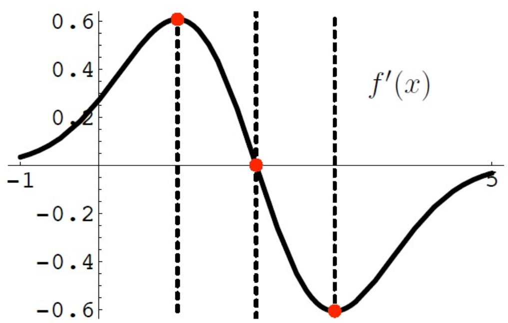
Bsp. 5 $f(x) = e^{-(x-2)^2/2}$, $D(f) = [-1, 5]$, $f'(x) = e^{-(x-2)^2/2} \cdot (2 - x)$



$f''(x)$
$= e^{-(x-2)^2/2}(2-x)^2 - e^{-(x-2)^2/2}$
$= e^{-(x-2)^2/2}((2-x)^2 - 1)$

Vorzeichen der ersten Ableitung:
Da $e^z > 0$ für jedes z ist, bestimmt der Faktor $(2 - x)$ das Vorzeichen von f':

$$f'(x) = \begin{cases} > 0, & 2 > x, \text{ str. wachsend} \\ = 0, & 2 = x, \text{ Nullstelle} \\ < 0 & 2 < x, \text{ strikt fallend} \end{cases}$$



Lokale Extrema:
Da $f''(2) = -1 < 0$, ist $x = 2$ eine Max-Stelle mit Max-Wert $f(2) = 1$:
$(2, 1)$ ist ein lokaler Max-Punkt.

Globale Extrema:

$$\begin{aligned} f(-1) &= e^{-9/2} < 1 && \leftarrow \text{globales Min.} \\ f(2) &= 1 && \leftarrow \text{globales Max.} \\ f(5) &= e^{-9/2} < 1 && \leftarrow \text{globales Min.} \end{aligned}$$