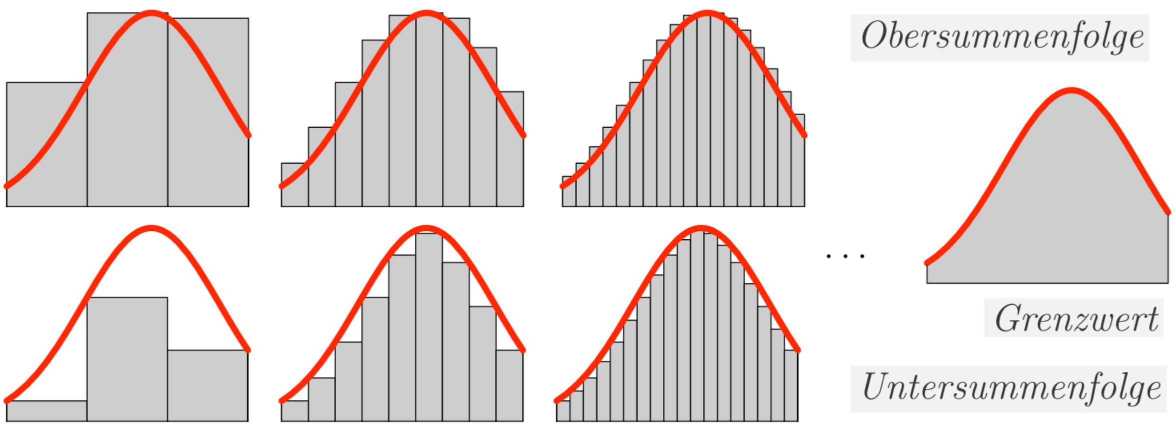
Elementare Integration

Wiederholung von Grundkenntnissen

53 Bestimmtes Integral (Bestimmtes Riemann-Integral)

Dies ist die einfachste und gleichzeitig für ökonomische Anwendungen wichtigste Form des Integralbegriffes.
Grob, *zur Erinnerung*: Auf gewissen Intervallunterteilungen/Zerlegungen von $[a, b]$ wird die Fläche mit „etwas zu kleiner“ (je mit den minimalen Funktionswerten) und „etwas zu großer“ (je mit den maximalen Funktionswerten) Rechteckstücken zwischen x-Achse und (positiver) Funktionskurve gemessen. Für jede Zerlegung ergibt sich eine „Untersumme“ und eine „Obersumme“ dieser Rechtecke. Bei einem erfolgreichen Grenzübergang bzgl. immer feineren Zerlegungen ergibt sich *eine* Zahl (die unter positiven Kurvenstücken die Fläche misst und nicht von der Wahl der Zerlegungsfolge abhängt).

Diese Zahl heißt dann (Riemann-)**Integral von** f **über** $[a, b]$ und die Funktion f heißt **über** $[a, b]$ (Riemann-)**integrierbar**



Schreibweise für den Zahlenwert eines Integrals über $[a, b]$: $\int_a^b f(t)dt$; dabei heißt t die **Integrationsvariable** und f der **Integrand**.

Wichtige Funktionstypen sind integrierbar:

> über $[a, b]$ *stetige* Funktionen sind über $[a, b]$ integrierbar,
>
> über $[a, b]$ *monotone*, beschränkte Funktionen sind über $[a, b]$ integrierbar.

Insbesondere sind also alle unsere Grundfunktionen (▷ Grundl. Nrn. 10/11/13) integrierbar. Zur konkreten Berechnung eines Integrals wird obige (leicht verständliche) Grenzwertmethode selten herangezogen. Andere Grenzübergänge (z.B. Stammfunktionen), die aber nicht immer verfügbar sind, lassen oft allgemeinere„formelmäßige" Berechnungen zu.

Obiges Integral ist ein Flächenstück unter $f(x) = e^{-\frac{-x^2}{2}}/\sqrt{2\pi}$ (früherer 10 DM-Schein)
▷ *Normalverteilung* ▷ Statistik

In den meisten ökonomischen Anwendungen werden Sie Funktionen integrieren, die Zusammensetzungen unserer Grundfunktionen sind. Mithilfe von Rechenregeln lassen sich dann die Integrale zurückführen auf Integrale dieser Grundfunktionen. Von diesen weiß man, wie sie zu integrieren sind. Daher reicht es zu wissen, wie unsere Grundfunktionen integriert werden (▷ Nr. 56). Zunächst einige elementare Rechenregeln für das Integrieren.

54 Rechenregeln für bestimmte Integrale

(R1) $\int_a^b (f(t) \pm g(t))\, dt = \int_a^b f(t)dt \pm \int_a^b g(t)dt$

(R2) $\int_a^b c \cdot f(t)dt = c \cdot \int_a^b f(t)dt$ ($c \in \mathbb{R}$ konstant)

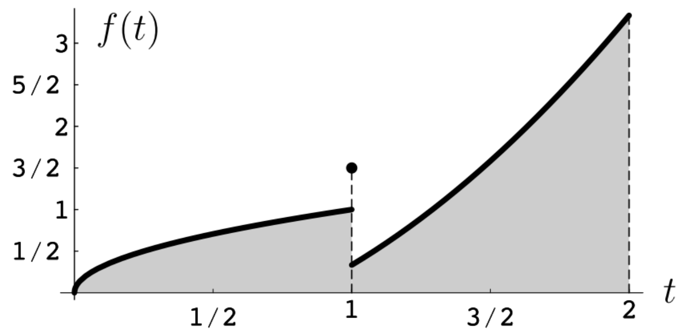
(R3) $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$, insbesondere $\int_a^a f(t)dt = 0$

(R4) $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

Regel 4 bedeutet insbesondere, daß **stückweise stetige Funktionen** (endlich viele Stücke) **entsprechend stückweise integriert** werden können. Die Funktionswerte an den „Nahtstellen" sind dabei wegen $\int_a^a f(t)dt = 0$ ohne Bedeutung.

Bsp. 1

Gefragt: $\int_0^2 f(t)dt$, wobei $f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{für } 0 \le t < 1 \\ 3/2 & \text{für } t = 1 \\ t^2 - \frac{2}{3} & \text{für } 1 < t \le 2 \end{cases}$



$\int_0^2 f(t)dt$ misst die Fläche zwischen der x-Achse und der positiven Funktionskurve $f(t)$

$$\int_0^2 f(t)dt \overset{(R3),(R4)}{=} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt + 0 + \int_1^2 \left(t^2 - \tfrac{2}{3}\right) dt \overset{(R1),(R2)}{=} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt + \int_1^2 t^2 dt - \tfrac{2}{3} \int_1^2 1 dt$$

(Bsp. wird fortgesetzt)

Ein wesentliches Hilfsmittel für Integralberechnungen beruht auf den Grenzwertbildungen $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} F'(x_0)$ für die Ableitung an der Stelle x_0, approximativ: $F(x_1) - F(x_0) \approx (x_1 - x_0) \cdot F'(x_0)$, wenn $x_1 - x_0$ „klein" ist. Wenn $F'(x_0) = f(x_0)$ ist, können also (in einer ersten Näherung) rechteckige Flächenstücke der Form Breite×Höhe $= (x_1 - x_0) f(x_0)$ durch $F(x_1) - F(x_0)$ approximiert werden. Gesucht: Funktionen, deren Ableitung ein gegebener stetiger Integrand f ist. Ein wichtiges Ergebnis (▷ Nr. 57) besagt, dass sich für solche Funktionen die Berechnung eines bestimmten Integrals sehr vereinfacht.

55 Stammfunktionen

$\boldsymbol{F}$ heißt Stammfunktion zu einer Funktion $\boldsymbol{f}$ über $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, wenn gilt:

$$\boldsymbol{F'(x)} = \boldsymbol{f(x)} \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Mit $\boldsymbol{F}$ ist auch $\boldsymbol{F + c}$, (c konstant), eine Stammfunktion. Die (bzgl. der Eigenschaft „Stammfunktion" unbestimmte) Zahl $\boldsymbol{c}$ heißt *Integrationskonstante*.

56 Stammfunktionen zu Grundfunktionen

	Funktion $f(x)$	**Stammfunktion** $F(x)$	
$x > 0, r \in \mathbb{Q}, r \neq -1$:	x^r	$\frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1}$	$+c$
$x > 0$:	x^{-1}	$\ln x$	$+c$
$x > 0$:	$\ln x$	$x \cdot \ln x - x$	$+c$
$x \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$:	$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$	$+c$
Insbesondere			
$b > 0, b \neq 1$:	$\log_b(x) := \frac{\ln x}{\ln b}$	$\frac{1}{\ln b}(x \cdot \ln x - x)$	$+c$
$b > 0, b \neq 1$:	$b^x := e^{x \ln b}$	$\frac{1}{\ln b} b^x$	$+c$

Bsp. 2

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
1	$x \quad +c$		$x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$		$\log_2(x)$	$\frac{1}{\ln 2}(x \ln x - x) + c$
x^1	$\frac{1}{2}x^2 \quad +c$		x^2	$\frac{1}{3}x^3 + c$		$(\frac{1}{2})^x$	$\frac{1}{\ln 1/2} \cdot (\frac{1}{2})^x + c$

Leider haben manche wichtigen (sogar beliebig oft differenzierbare) Funktionen f keine wie in obiger Tabelle angebbare Stammfunktionen, sondern nur eine „Integral-Stammfunktion“ - siehe Gleichung (ISF) unten, z.B. die Dichte $f(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ der Standardnormalverteilung ($\triangleright$ Statistik)

Weitere *Sprechweisen* für Stammfunktionen F:

- Unbestimmtes „Integral“
- im Hinblick auf eine gewisse „Umkehrung“ der Differentiation:

  F ist eine (mögliche) „Aufleitung“ von f (und f die „Ableitung“ von F)

57 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist die Funktion f über einem Intervall $[a, b]$ **stetig** und ist F eine **Stammfunktion** zu f, dann gilt

$$\textbf{(HDIR)} \qquad F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

Übersichtlich und nützlich für „lange“ Ausdrücke ist die Schreibweise:

$$[F(t)]_a^b := F(b) - F(a)$$

Konstante Summanden in einer Stammfunktion (Integrationskonstanten c) verschwinden dabei durch die Differenzbildung.

Bsp. 1 (Fortsetzung)

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 t^{1/2}dt + \int_1^2 t^2 dt - \frac{2}{3}\int_1^2 1dt \underset{Bsp.2}{=} \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^2 - \frac{2}{3}\left[t\right]_1^2$$
$$= \frac{2}{3}(1-0) + \frac{1}{3}(8-1) - \frac{2}{3}(2-1) = \frac{7}{3}$$

58 Integral-Stammfunktion

Umgekehrt zu (HDIR) definiert für einen über $[a, b]$ **stetigen** Integranden f die Funktion

$$\textbf{(ISF)} \qquad F(x) := F(a) + \int_a^x f(t)dt \qquad \text{für } a \le x \le b$$

eine **Stammfunktion** von f (d.h. also $F'(x) = f(x)$ für $a \le x \le b$)

$F(a)$ ist hierbei die Festlegung für die Integrationskonstante, die sich für $x = a$ ergeben soll, und die meist eine inhaltliche (ökonomische) Bedeutung hat. Diese Festlegung (Schreibweise) ist dann auch in direkter Übereinstimmung mit (HDIR), d.h. $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$.

Sind z.B. im Rahmen einer Marginalanalyse im Bereich $0 \le t \le b$ die Grenzkosten $f(t)$ der Ausgangspunkt, dann werden (für $0 \le x \le b$) durch $F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\ dt$ die Gesamtkosten dargestellt, durch $F(0)$ die Fixkosten und durch $F(x) - F(0) = \int_0^x f(t)\ dt$ die variablen Kosten.

Weitere Hilfsmittel zur Berechnung bestimmter Integrale

59 Lineare Substitutionsregel

Für $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p \neq 0$ gilt

$$\textbf{(SR)} \qquad \int_a^b f(p\cdot t + q)\ dt = \begin{cases} -\frac{1}{p}\int_{(p\cdot b+q)}^{(p\cdot a+q)} f(z)\ dz & \text{für } p < 0 \\ \frac{1}{p}\int_{(p\cdot a+q)}^{(p\cdot b+q)} f(z)\ dz & \text{für } p > 0 \end{cases}$$

Bsp. 3a $\int_5^{77}(4+t)^{1/2}\ dt = ?$

$$\int_5^{77}(4+t)^{1/2}\ dt = \int_9^{81} z^{1/2}\ dz = \left[\frac{2}{3}\ z^{3/2}\right]_9^{81} = \left(\frac{2}{3}\ 9^3 - \frac{2}{3}\ 3^3\right) = 468.$$

Bsp. 3b $\int_0^{\ln 4} e^{-t/2+1}\ dt = ?$

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 4} e^{-t/2+1}\ dt = 2\int_{-\ln 2+1}^{1} e^z\ dz = 2\,[e^z]_{(-\ln 2+1)}^1 \quad &= \quad 2(e^1 - e^{-\ln 2+1}) \\ &= \quad 2e^1(1-e^{-\ln 2}) = e^1\end{aligned}$$

60 Uneigentliche (bestimmte) Integrale Grenzwerte von Integralen

Für eine stetige Funktion können (aber müssen nicht) die Grenzwerte

$$\int_a^{\infty} f(t)dt := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(t)dt \qquad \text{uneig. Integral von } f \text{ über } [a,\infty]$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)dt := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(t)dt \qquad \text{uneig. Integral von } f \text{ über } [-\infty,b]$$

existieren. Ist $D(f)=\mathbb{R}$, so kann (aber muss nicht) der Grenzwert

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt := \int_{-\infty}^{d} f(t)dt + \int_d^{\infty} f(t)dt \qquad \text{uneig. Integral von } f \text{ über } \mathbb{R}$$

existieren, wobei d fix (die Wahl von d ändert den Grenzwert nicht)

Bsp. 4

($\lambda > 0$ fix) $\int_0^b \lambda e^{-\lambda t}dt = [-e^{-\lambda t}]_0^b = 1-e^{-\lambda b} \underset{b\to\infty}{\to} 1-0$, also $\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}dt = 1$. Anders ausgedrückt: Die Integral-Stammfunktion ($F(0)=0$) $F(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x<0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = 1-e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0\end{cases}$ erfüllt $F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Bsp. 5

Für $0 < a \le b$ ist
$$\int_a^b t^{-r} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-r}[t^{1-r}]_a^b & \text{für } 0 < r, r \neq 1 \\ [\ln t]_a^b & \text{für } r = 1 \end{cases}$$
Mit $0 < a \to 0$ bzw. $b \to \infty$ ergibt sich für die rechts stehenden Ausdrücke:

$$\lim_{0<a\to 0} \frac{1}{1-r}(b^{1-r} - a^{1-r}) = \begin{cases} \frac{1}{1-r} b^{1-r} & \text{für } 0 < r < 1 \\ \infty & \text{für } r > 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim_{0<a\to 0}(\ln b - \ln a) \quad = \infty$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-r}(b^{1-r} - a^{1-r}) = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < r < 1 \\ \frac{1}{r-1} a^{1-r} & \text{für } r > 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln a) \quad = \infty$$

Die Grenzwertbildung wird wiederum typografisch in die Integrationsgrenze übernommen, z.B. wenn ($a \to 0$ und $b = 1$) bzw. ($a = 1$ und $b \to \infty$):

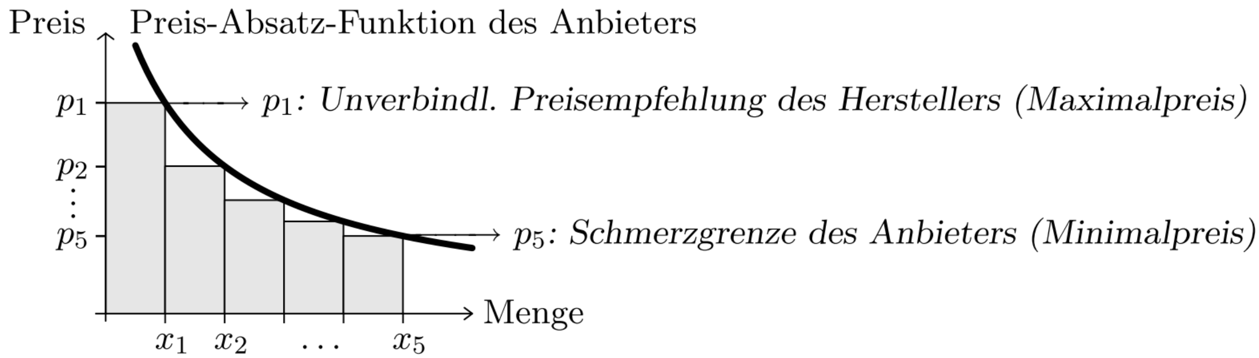
61

$$\int_0^1 t^{-r} dt := \lim_{0<a\to 0} \int_a^1 t^{-r} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & , 0 < r < 1 \\ \infty & , r \ge 1 \end{cases}$$
$$\int_1^\infty t^{-r} dt := \lim_{b\to\infty} \int_1^b t^{-r} dt = \begin{cases} \infty & , 0 < r \le 1 \\ \frac{1}{r-1} & , r > 1 \end{cases}$$

z.B. also $\int_0^1 t^{-1/2} dt = 2$ und $\int_0^1 t^{-1} dt = \infty = \int_1^\infty t^{-1} dt$ und $\int_1^\infty t^{-3/2} dt = 2$

(Vereinfachte) Ökonomische Anwendungsbeispiele

Bsp. 6 Beispiel für eine Untersumme: Preisdifferenzierung eines Anbieters
(z.B. über Mengenrabatte oder „Billigzugaben“)

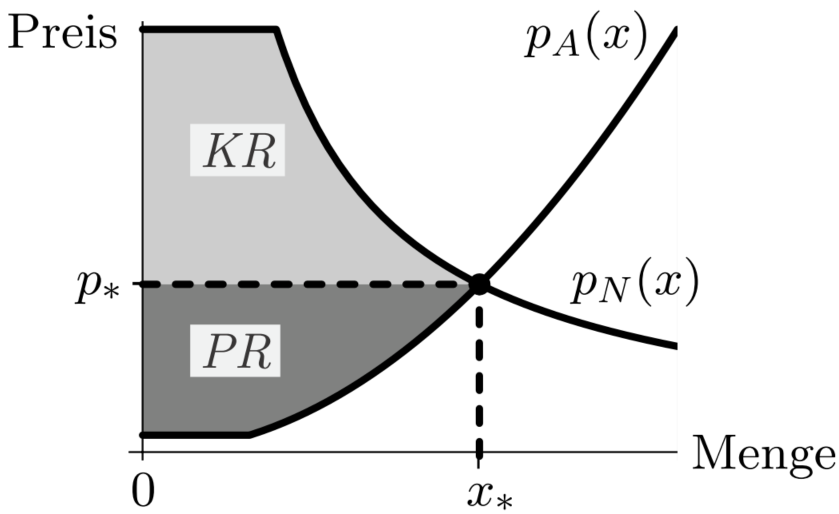


Die Rechteck-Flächen (je Preis × Menge) beschreiben den bei Preisdifferenzierung insgesamt erreichbaren Erlös: $p_1 \cdot x_1 + p_2(x_2 - x_1) + \ldots + p_5(x_5 - x_4)$

Verfeinerte Untersummen (idealisiert durch den Grenzwert: das Integral), ergeben sich bei Aggregation:

Bsp. 7 Interpretation von Flächen: **Konsumenten-/Produzentenrente**

In einem Marktmodell für ein Gut sind eine (monoton fallende) Nachfragefunktion $p_N(x)$ und eine (monoton wachsende) Angebotsfunktion $p_A(x)$ gegeben, die beschreiben, welchen (Stück-)Preis $p_N(x)$ die aggregierte Nachfrage x zu zahlen bereit ist und zu welchem kalkuliertem (Stück-)Preis $p_A(x)$ das aggregierte Angebot x gemacht wird. Preise und Mengen werden idealisierend als beliebig (genügend oft) teilbar angenommen. Die Schnittpunktbedingung $p_A(x) = p_N(x)$ ergibt den Gleichgewichtspunkt (x_*, p_*) für dieses Gut. Der „Profitbereich“ der Nachfrage (der durch $E_* = p_* \cdot x_*$ nicht abgeschöpfte mögliche Erlös bei Nachfragern mit höherer Preisbereitschaft als p_*) heißt *Konsumentenrente*, der „Profitbereich“ des Angebots (der als Teil des Gesamterlöses $E_* = p_* \cdot x_*$ zusätzlich abgeschöpfte Erlös von Anbietern mit niedrigerer Preiskalkulation als p_*) heißt *Produzentenrente*.



- Gleichgewichtspunkt (x_*, p_*) mit dem (Markt-)Erlös $E_* = p_* \cdot x_*$
- Konsumentenrente bei (x_*, p_*) : $KR = \int_0^{x_*} p_N(t)dt - p_* \cdot x_*$
- Produzentenrente bei (x_*, p_*) : $PR = p_* \cdot x_* - \int_0^{x_*} p_A(t)dt$