Partielle und totale Betrachtungsweisen

Partielle Betrachtungsweise

erfassen **Einzeleffekte einer Variable**, wenn jeweils alle anderen Variablen in ihrem Wert fixiert bleiben (als *konstant* betrachtet werden: „ceteris paribus“)

Die Berechnung partieller Ableitungen und partieller Elastizitäten sind also uns wohlbekannte eindimensionale Methoden, die nur noch sauber erkennbar symbolisiert werden müssen.

Es wird unten stets vorausgesetzt, dass die vorkommenden Grenzwerte existieren. (Dies muss nicht so sein, wird bei ökonomischen Anwendungen aber fast immer/in der Regel doch der Fall sein.)

62 Partielle Funktionen, Partielle Ableitungen

Aus Gründen der „Übersichtlichkeit“ verwenden wir hier nur zwei Variablen. Eine Zeit lang werden die bei partieller Betrachtung als <u>konstant</u> betrachteten Argumente <u>unterstrichen</u>.

Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ mit $x, y, f(x, y) \in \mathbb{R}$ (meist $x, y > 0$)

Partielle Funktionen *Im Index symbolisch die partiell betrachtete Variable*

$$f_x(x, \underline{y}) := f(x, \underline{y}) \qquad \text{mit } x, f(x, \underline{y}) \in \mathbb{R} \text{ und } \underline{y} \in \mathbb{R} \text{ fix}$$
$$f_y(\underline{x}, y) := f(\underline{x}, y) \qquad \text{mit } f(\underline{x}, y), y \in \mathbb{R} \text{ und } \underline{x} \in \mathbb{R} \text{ fix}$$

Partielle Ableitungen *Im Index symbolisch die partiell betrachtete Variable*

$$f'_x(x_0, \underline{y}) := \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f_x(x_1, \underline{y}) - f_x(x_0, \underline{y})}{x_1 - x_0}, \qquad \text{wobei } \underline{y} \in \mathbb{R} \text{ fix}$$
$$f'_y(\underline{x}, y_0) := \lim_{y_1 \to y_0} \frac{f_y(\underline{x}, y_1) - f_y(\underline{x}, y_0)}{y_1 - y_0}, \qquad \text{und } \underline{x} \in \mathbb{R} \text{ fix}$$

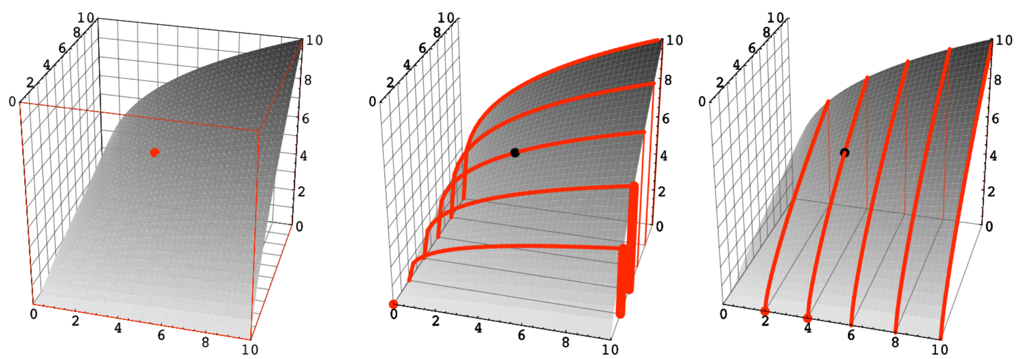
Mit Hilfe dieser Grenzwertbildungen werden - genau wie bei Funktionen einer Variablen - partielle Marginalanalysen aufgebaut (▷ Nr.65)

Das Ergebnis der partiellen Differentiation einer Funktion mehrerer Variabler ist wiederum eine Funktion dieser mehreren Variablen: die jeweils anderen Variablen werden *nur für die Bildung der partiellen Ableitung fixiert und stehen danach wieder als Variable zur Verfügung.* Der obige Vorgang der Bildung partieller Funktionen und deren Ableitung kann also - für *jede* dieser Variablen (auch für die jeweils anderen) - erneut auf diese partiellen Ableitungen angewendet werden:

63 Partielle Ableitungen zweiter Ordnung *höhere Ordnungen analog*

$$f''_{xx}(x_0,\underline{y}) := (f'_x)'_x(x_0,\underline{y}) \qquad f''_{xy}(\underline{x},y_0) := (f'_x)'_y(\underline{x},y_0)$$
$$f''_{yx}(x_0,\underline{y}) := (f'_y)'_x(x_0,\underline{y}) \qquad f''_{yy}(\underline{x},y_0) := (f'_y)'_y(\underline{x},y_0)$$

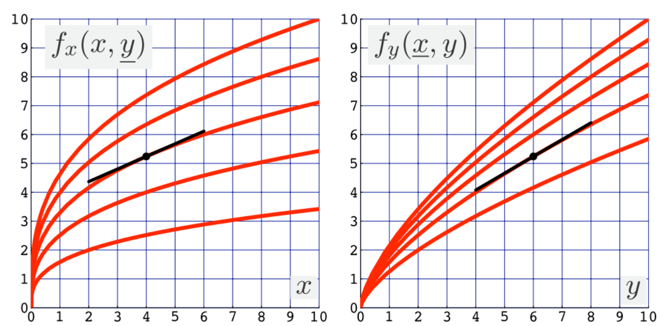
Bsp. 1 Interessierender Bereich: $x > 0$ und $y > 0$



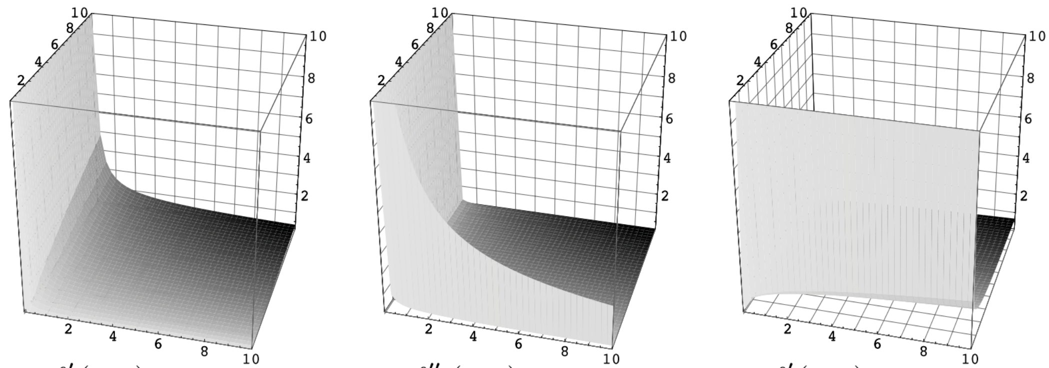
$f(x,y) = x^{1/3} \cdot y^{2/3}$
$f(4,6) \approx 5.24$

$f_x(x,\underline{y}) = x^{1/3} \cdot \underline{y}^{2/3}$
für $\underline{y} \in \{2,4,6,8\}$

$f_y(\underline{x},y) = \underline{x}^{1/3} \cdot y^{2/3}$
für $\underline{x} \in \{2,4,6,8\}$



$$f'_x(x,y) = \tfrac{1}{3} \cdot x^{-2/3} \cdot y^{2/3} \qquad f'_y(x,y) = \tfrac{2}{3} \cdot x^{1/3} \cdot y^{-1/3}$$
$$f'_x(4,6) \approx 0.44 \qquad f'_y(4,6) \approx 0.58$$
$$f''_{xx}(x,y) = -\tfrac{2}{9}\, x^{-5/3}\, y^{2/3} \qquad f''_{yy}(x,y) = -\tfrac{2}{9}\, x^{1/3}\, y^{-4/3}$$
$$f''_{xy}(x,y) = \tfrac{2}{9}\, x^{-2/3}\, y^{-1/3} = f''_{yx}(x,y) = \tfrac{2}{9}\, x^{-2/3}\, y^{-1/3}$$



$f'_x(x,y)$ $f''_{xy}(x,y)$ $f'_y(x,y)$

- $f(x,y)$ ist eine 3D-Funktion
- $f_x(x,\underline{y})$ und $f_y(\underline{x},y)$ sind beide Funktionen einer Variablen (2D-Funktionen)
- Die beiden partiellen Ableitungen f'_x und f'_y werden per Aufhebung der Fixierung der anderen Variable, nach dem Ableitungsvorgang, wieder 3D-Funktionen
- Zur Gleichheit $f''_{xy} = f''_{yx}$ siehe Nr. 71

Die Schreibweise f_x bzw. f_y symbolisiert die ceteris-paribus-Denkweise/Argumentation ausgehend von der Stelle (x_0, y_0)

Bei der sogenannten *partiellen Marginalanalyse* geht es um das marginale Änderungsverhalten einer (ökonomischen) Funktion f bei marginaler ceteris paribus Änderung einer (ökonomischen) Einflußgröße. Mathematisch bedeutet dies bei einer Funktion f mit 2 Variablen nichts anderes als eine Marginalanalyse der partiellen Funktionen f_x und f_y. Die Begriffe der Tangenten, und Elastizitäten übertragen sich unmittelbar, die Interpretation ist unverändert (wie bei Funktionen einer Variable).

▷ Vergleiche nun und betrachte Nrn. 46a, 49a, 62

64 Partielle Tangenten, partielle Elastizitäten

- Partielle Tangenten (Tangenten an f_x bzw. f_y)

$$\left(T^f_{(x_0,y_0)}\right)_x (x, \underline{y_0}) := f_x (x, \underline{y_0}) + f'_x (x, \underline{y_0}) \cdot (x - x_0)$$
$$\left(T^f_{(x_0,y_0)}\right)_y (\underline{x_0}, y) := f_y (\underline{x_0}, y) + f'_y (\underline{x_0}, y) \cdot (y - y_0)$$

d.h.: $T^f_x \approx f_x + f'_x \cdot dx$ und $T^f_y \approx f_y + f'_y$ an der Stelle (x_0, y_0) mit $dx \approx x - x_0$ und $dy \approx y - y_0$

- Partielle Elastizitäten (Elastizität von f_x bzw. f_y)

$$\mathcal{E}^f_x (x_0, \underline{y_0}) = x_0 \cdot \frac{f'_x (x_0, \underline{y_0})}{f_x (x_0, \underline{y_0})} \text{ und } \mathcal{E}^f_y (\underline{x_0}, y_0) = y_0 \cdot \frac{f'_y (\underline{x_0}, y_0)}{f_y (\underline{x_0}, y_0)}$$

kurz: $\mathcal{E}^f_x = x_0 \cdot \frac{f'_x}{f_x}$ und $\mathcal{E}^f_y = y_0 \cdot \frac{f'_y}{f_y}$

Die Werte partieller Ableitungen und Elastizitäten tauchen ganz entsprechend Funktionen mit einer Variablen als Proportionalitätsfaktoren [▷ Nrn. 46a, 49a] bei den Näherungsansätzen auf. Für die partielle Funktion f_y wird dies - zur Übung der Kurzschreibweise - nochmals aufgeschrieben. Für f_x ergibt sich dies analog.

Bezeichnungen ab der folgenden Übersicht, sofern nichts anderes vermerkt:

- $(x_0, y_0) = (x_{alt}, y_{alt})$ Basisstelle = Ausgangspunkt der Marginalanalyse
- $dx \approx x_1 - x_0$ bzw. $dy \approx y_1 - y_0$ Abweichungen der Variablen
- $x_1 = x_{neu}$ bzw. $y_1 = y_{neu}$ abweichende Werte der betrachteten Variablen
- $df_x \approx f_x (x_1, \underline{y_0}) - f_x (x_0, \underline{y_0})$ bzw. $df_y \approx f_y (\underline{x_0}, y_1) - f_x (\underline{x_0}, y_0)$ Abweichungen der Funktionswerte

Wie bei Nrn. 42a, 49a führen einfache Umformungen zu folgenden Näherungen

ÜBERSICHT — Alle Nenner werden als $\neq 0$ vorrausgesetzt!

65 Näherung für Partielle absolute und relative Änderungen von f

	Aussageziel bzgl. $f_y\left(\underline{x_0}, y\right)$	$\approx$	Proportion'faktor	$\cdot$	Aussagebasis bzgl. y
	absolute Änderung		Ableitung von f_y		absolute Änderung
1	df_y	$\approx$	f_y'	$\cdot$	dy
	relative Änderung		Elastizität von f_y		relative Änderung
2	df_y/f_y	$\approx$	$y_0 \cdot f_y'/f_y$	$\cdot$	dy/y_0

Analoge Näherungen gelten für f_x, z.B. wird Näherung (2) zu:

$$df_x/f_x \approx \left(x_0 \cdot f_x'/f_x\right) \cdot (dx/x_0)$$

Mathematisch korrekt (für unsere Zwecke aber auf Dauer zu aufwendig oder unnötig weitere Symbole erfordernd) müsste z.B. die Näherung (1) so lauten: $f\left(\underline{x_0}, y_1\right) - f\left(\underline{x_0}, y_0\right) \approx df_y = f_y' \cdot dy \approx f_y' \cdot (y - y_0)$. Die Verwendung von $\approx$ statt $=$ in der Mitte soll also (in der Übersicht) abkürzend die Verwendung der beiden äußeren Näherungen symbolisieren.

Bsp. 2 Interessierende Funktion: $h(x,y) = (1+x) \cdot y \cdot e^{y-x},\ (x, y > 0)$

$$h_x'(x,y) = y\left(e^{y-x} + (1+x)e^{y-x}(-1)\right) = -xye^{y-x}$$

$$h_y'(x,y) = (1+x)\left(e^{y-x} + ye^{y-x} \cdot 1\right) = (1+x)(1+y)e^{y-x}$$

$$\mathcal{E}_x^h(x,y) = \frac{-xye^{y-x}}{(1+x)ye^{y-x}} \cdot x = -\frac{x^2}{1+x}$$

$$\mathcal{E}_y^h(x,y) = \frac{(1+x)(1+y)e^{y-x}}{(1+x)ye^{y-x}} \cdot y = 1+y$$

Zahlenbeispiel: $(x_0, y_0) = (4, 10), x_1 = 4.08, y_1 = 10.05$, d.h. $dx \approx 0.08, dy \approx 0.05$ bzw. Erhöhung von $x_0 = 2\% \approx dx/x_0$, Erhöhung von $y_0 = 0.5\% \approx dy/y_0$. Abkürzungen:

$$dh_x \approx h_x(4.08, \underline{10}) - h_x(4, \underline{10}) \text{ und } dh_y \approx h_y(\underline{4}, 10.05) - h_y(\underline{4}, 10)$$

$$dh_x/h_x \approx \frac{h_x(4.08, \underline{10}) - h_x(4, \underline{10})}{h_x(4, \underline{10})} \text{ und } dh_y/h_y \approx \frac{h_y(\underline{4}, 10.05) - h_y(\underline{4}, 10)}{h_y(\underline{4}, 10)}$$

Je nach gegebener Aussagebasis und interessierendem Aussageziel, wobei $h_x, h'_x, \mathcal{E}^h_x$ bzw. $h_y, h'_y, \mathcal{E}^h_y$ für $(x_0 = 4, y_0 = 10)$ ausgewertet werden, ergibt sich:

(1a) $dh_x \approx h'_x \cdot dx \approx (-4 \cdot 10 \cdot e^{10-4}) \cdot (0.08) = -3.2 \cdot e^6$ (eher seltend interessant)

(2a) $dh_x/h_x \approx \mathcal{E}^h_x \cdot (dx/x_0) \approx \left(-\frac{4^2}{1+4}\right) \cdot (+2\%) = -6.4\%$ (eher oft interessant)

(1b) $dh_y \approx h'_y \cdot dy \approx \big((1+4)(1+10)e^{10-4}\big) \cdot (0.05) = 2.75 \cdot e^6$ (seltend interessant)

(2b) $dh_y/h_y \approx \mathcal{E}^h_y \cdot (dy/y_0) \approx (1+10) \cdot (+0.5\%) = +5.5\%$ (eher oft interessant)

Zum Vergleich die „genauen“/genaueren Werte: $h(4, 10) = 50e^6 = 20171.4$

$$h(4.08, 10) - h(4, 10) = -1252.9, h(4, 10.05) - h(4, 10) = 1140.2$$
$$\frac{h(4.08, 10) - h(4, 10)}{h(4, 10)} = -6.21\%, \frac{h(4, 10.05) - h(4, 10)}{h(4, 10)} = 5.65\%$$

Totale Betrachtungsweise - Addition der partiellen Effekte

66 Totales Differential und Tangentialebene ▷ *Nr. 64*

- **Totales Differential** an der Stelle (x_0, y_0)

$$df_{(x_0,y_0)}(dx, dy) := f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy$$

Addition der partiellen marginalen Änderungseffekte der beiden Variablen, kurz:

$$df = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy = df_x + df_y$$

- **Tangentialebene** an der Stelle (x_0, y_0)

$$T^f_{(x_0,y_0)}(x, y) := f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Die 3D-Tangente ist eine Ebene, die f im 3D-Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ in beide (Variablen-)„Richtungen“ tangiert, mit den partiellen Tangenten an f_x bzw. f_y als „Richtungsachsen“.

Bei einer Variable wird die (lineare) Näherung $f(x) \approx f(x_0) + f'_{x_0} \cdot (x - x_0)$ durch die rechts stehende Tangentengleichung verwendet. Bei zwei Variablen wird entsprechend mit der Tangentialebene approximiert, wobei die beiden Abweichungen $x - x_0$ und $y - y_0$ „nahe bei Null“ sein sollen:

▷ $f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

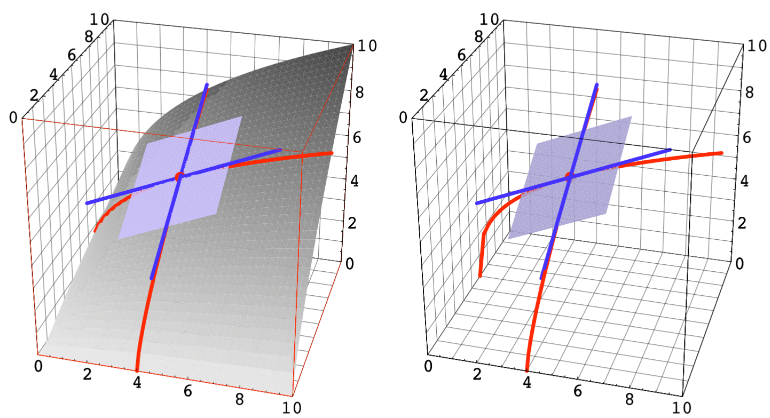
Mit der grenzwertigen Schreibweise $df \approx f(x, y) - f(x_0, y_0)$ und $dx \approx x - x_0$ und $dy \approx y - y_0$ liest sich dies (▷ Nrn. 65, 66) als $df \approx f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$

ÜBERSICHT Alle Nenner werden als $\neq 0$ vorrausgesetzt!

67 Näherung für Totale absolute und relative Änderungen von f

	Aussageziel bzgl. $f(x,y)$	$\approx$	**$x-$Proportion'faktor**	$\cdot$	**Aussagebasis bzgl. x**
			$+$ **$y-$Proportion'faktor**	$\cdot$	**Aussagebasis bzgl. y**
	absolute Änderung		Partielle Ableitungen		absolute Änderungen
1	df	$\approx$	$f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$		
	relative Änderung		Partielle Elastizitäten		relative Änderungen
2	df/f	$\approx$	$(x_0 \cdot f'_x/f) \cdot (dx/x_0) + (y_0 \cdot f'_y/f) \cdot (dy/y_0)$		

Bsp. 1 (Fortsetzung) $f(x,y) = x^{1/3} \cdot y^{2/3}$



Ein Stück der Tangentialebene T^f und der partiellen Tangenten T^f_x und T^f_y an der Stelle $(4,6)$.

$$T^f_x(x,y) = f(4,6) + f'_x(4,6) \cdot (x-4)$$
$$T^f_y(x,y) = f(4,6) + f'_y(4,6) \cdot (y-6)$$
$$T^f_{(4,6)}(x,y) = f(4,6) + f'_x(4,6) \cdot (x-4) + f'_y(4,6) \cdot (y-6)$$

Bsp. 2 (Fortsetzung)

Basisstelle $(x_0, y_0) = (4, 10)$, die partiellen Effekte des Zahlenbeispiels übernehmen wir (ausgerechnet) von dort.

$$
\begin{aligned}
(1)\ dh \approx h'_x \cdot dx + h'_y \cdot dy &= (-4 \cdot 10e^{10-4}) \cdot dx + \left((1+4)(1+10)e^{10-4}\right) \cdot dy \\
&= e^6(-40 \cdot dx + 55 \cdot dy) \underset{\text{Zahlenbsp.}}{\approx} e^6(-3.2 + 2.75) = -0.45e^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\ dh/h &\approx (x \cdot h'_x/h) \cdot (dx/x) + (y \cdot h'_y/h) \cdot (dy/y) \\
&= \left(-\frac{4^2}{1+4}\right) \cdot dx + (1+10) \cdot dy \\
&= -3.2 \cdot (dx/x) + 1.1 \cdot (dy/y) \underset{\text{Zahlenbsp.}}{\approx} -6.4\% + 5.5\% = -0.9\%
\end{aligned}
$$

Tangentialebene:

$$
\begin{aligned}
T^h_{(4,10)}(x, y) &= 50e^6 - 40e^6(x-4) + 55e^6(y-10) \\
&= 5e^6\,(10 - 8(x-4) + 11(y-10))
\end{aligned}
$$

Z.B. ist $f(4.08, 10.05) \approx T^h(4.08, 10.05) = 49.55 \cdot e^6$, bei vergleichsweise exaktem Wert $(1 + 4.08) \cdot 10.05 \cdot e^6 = 51.054 \cdot e^6$

Das totale Differential $df_{(x_0,y_0)}$ einer Funktion f an einer Stelle (x_0, y_0) ($\triangleright$ Nr. 66) kann streng genommen nur gebildet werden, wenn die Funktion f an der Stelle (x_0, y_0) *total differenzierbar* ist. Dies ist eine Eigenschaft, welche die bloße Existenz von partiellen Ableitungen in (x_0, y_0) **verschärft**. Wir werden darauf nicht weiter eingehen, da bei fast allen ökonomischen Anwendungen Funktionen mit mehreren Variablen vorkommen, deren partiellen Ableitungen **zusätzlich** *(total) stetig* ($\triangleright$ Nr. 69) sind. Dann kann das folgende bekannte Faktum ausgenutzt werden

f besitzt partielle Ableitungen f'_x, f'_y und f'_x, f'_y sind total stetig an der Stelle (x_0, y_0)

$\Rightarrow$ f ist total differenzierbar an der Stelle (x_0, y_0)

68 **Grenzwert einer Funktion f in (x_0, y_0)** $(x_0, y_0) \in D(f)$

Die Zahlen x_0 und y_0 sollen jeweils als Grenzwerte erreichbar durch Zahlenfolgen $x_n, n \in \mathbb{N}$ bzw. $y_n, n \in \mathbb{N}$, für die (für alle $n \in \mathbb{N}$) $(x_n, y_n) \in D(f)$ und $x_n \neq x_0$ bzw. $y_n \neq y_0$ gilt.

Eine Zahl c heißt Grenzwert der Funktion f an der Stelle (x_0, y_0), wenn für JEDES Paar von Folgen $(x_n, n \in \mathbb{N})$ und $(y_n, n \in \mathbb{N})$ mit $(x_n, y_n) \in D(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x_0$ bzw. $y_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} y_0$ gilt: $f(x_n, y_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} c$.

Schreibweisen GW $\quad \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = c$ oder $f(x, y) \to c$ für $x \to x_0$, $y \to y_0$

69 **(Totale) Stetigkeit einer Funktion f** $(x_0, y_0) \in D(f)$

Die Funktion heißt **(total) stetig an der Stelle (x_0, y_0), falls gilt:**

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \text{ existiert und } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Ist f an **jeder** Stelle $(x_0, y_0) \in D(f)$ (total) stetig, so heißt f **(total) stetig**.

70 Die Funktion $f(x, y)$ ist automatisch (total) stetig, falls Sie sich in einer der folgenden Weisen schreiben läßt

$$f(x, y) = f_1(x) + f_2(y) \quad \text{oder} \quad f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Hierbei bezeichnen $f_1(x)$ und $f_2(y)$ irgendwelche stetigen Funktionen mit einer Variablen, z.B. eine der Grundfunktionen $|x|, x^r$ $(r \in \mathbb{Q}), e^x, \ln x$.

Sind $f_1(x)$ und $f_2(y)$ sogar differenzierbar (z.B. eine der Grundfunktionen $|x|, x^r$ $(r \in \mathbb{Q}), e^x, \ln x$), so ist $f(x, y)$ total differenzierbar.

Fast alle der in ökonomischen Anwendungen vorkommenden Funktionen mit zwei Variablen und ihre partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung lassen sich (evtl. in verketteter Form) auf eine der obigen Weisen darstellen.

Nach Nr. 70 dürfen Sie folgende (zeitsparende und umrechnungsfreundliche) Vertauschbarkeitsregel „praktisch immer“ verwenden:

71 Vertauschbarkeit der Reihenfolge mehrfacher partieller Ableitung

Sind zwei partielle Ableitungen $f''_{x_i x_j}$ und f''_{x_j,x_i} nach dem Variablen x_i und x_j einer Funktion f (total) stetig, so gilt

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j,x_i}.$$

So z.B. auch (bei Variablen x, y, z)

$$f''_{xy} = f''_{yx}; \quad f''_{xz} = f''_{zx}; \quad f''_{yz} = f''_{zy}$$

und z.B. auch

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx} \text{ usw.}$$